VITO TRISUZZI

ANÁLISE DE VOLATILIDADES IMPLÍCITAS ATRAVÉS DE MÉTODOS BAYESIANOS

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do diploma de Engenheiro de Produção

São Paulo
2007

VITO TRISUZZI

ANÁLISE DE VOLATILIDADES IMPLÍCITAS ATRAVÉS DE MÉTODOS BAYESIANOS

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do diploma de Engenheiro de Produção

Orientador:
Professora Doutora Linda Lee Ho

São Paulo
2007

FICHA CATALOGRÁFICA

Trisuzzi, Vito
Análise de volatilidades implícitas através de métodos bayesianos / V. Trisuzzi. -- São Paulo, 2007.
p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Inferência bayesiana (Inferência estatística) 2.Mercado financeiro 3.Método de Monte Carlo 4.Probabilidade I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

À professora Linda, pelo empenho, pela paciência e pela confiança depositada em mim e neste trabalho.

A Christian Iveson e Rogério Oliveira, por estenderem a mão quando estava mais precisando.

Àqueles que fizeram essa jornada parecer menos dolorosa, os queridos amigos André Rezende, Cleber Horiuti, José Rodolfo Villaça, Lícia Figueiredo, Maurício Jardim, Naré Mekhitarian, Paulo Chi e Thiago Pinheiro. É de vocês que levo os melhores momentos vividos nestes cinco anos de Poli.

E finalmente aos meus pais, José Vito e Helena, meu irmão Igor e minha irmã Iany, a quem devo tudo e mais um pouco. Obrigado por fazerem de mim uma pessoa melhor a cada dia, pelo apoio e carinho incondicional, por jamais desistirem de acreditar de mim. Essa conquista é nossa! Amo muito cada um de vocês.

RESUMO

Este trabalho pretende desenvolver um modelo capaz de auxiliar na análise de volatilidades implícitas utilizadas na precificação de opções de taxa de câmbio. A proposta surgiu a partir de uma experiência de estágio no Deutsche Bank, onde crescia a demanda por este tipo de produto financeiro. Foi então introduzido o conceito de opções, bem como os modelos de precificação e as variáveis envolvidas. Dentre estas variáveis, foi detalhada a volatilidade e também suas dificuldades intrínsecas que motivaram a realização deste trabalho. Para a construção do modelo, foram utilizados métodos bayesianos de tal forma a balancear a informação de um especialista com a informação obtida a partir da observação de dados históricos da volatilidade implícita. Esta metodologia foi descrita e, com o auxílio do método de Monte Carlo, aplicada ao modelo que foi desenvolvido e testado neste trabalho.

ABSTRACT

This project aims to develop a model capable to assist the analysis of implied volatility used on foreign exchange rate options pricing. This proposal came out from an internship experience at Deutsche Bank, where the demand for this category of financial product was growing. So it was introduced the concept of options, as well as the pricing models and their related variables. Within these variables, volatility as well as its intrinsic difficulties were more detailed as these were the ones which motivated the development of this project. To build this model, bayesian methods were used in such a way to balance a specialist information with the information extracted from historical price of the implied volatility observations. This methodology was described and, supported by Monte Carlo's method, applied to the model that has been developed and tested in this project.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Organograma representativo da organização do Deutsche Bank no Brasil 26

Figura 1.2 – Relacionamento das equipes de Emerging Markets Strategy 30

Figura 2.1 – Volume negociado na BM&F no período de 1992 a 2004 35

Figura 2.2 – Gráfico do retorno da compra de uma call 37

Figura 2.3 – Resumo das possíveis posições assumidas numa opção 38

Figura 2.4 – Movimentos do preço da ação e da opção em exemplo numérico 44

Figura 2.5 – Movimentos do preço da ação e da opção em exemplo genérico 45

Figura 2.6 – Movimentos do preço da ação e da opção em exemplo genérico (dois passos) .. 48

Figura 2.7 – Processo generalizado de Wiener 53

Figura 2.8 – Distribuições alternativas do preço final do ativo 61

Figura 3.1 – Distribuição do preço de um ativo – exemplo genérico 64

Figura 3.2 – Obtenção da volatilidade implícita 68

Figura 3.3 – Smile da volatilidade para opções de taxa de câmbio 70

Figura 3.4 – Smile da volatilidade para opções do S&P 500 em 13/05/1993 70

Figura 3.5 – Estrutura a termo da volatilidade para opções do S&P 500 em 13/05/1993 71

Figura 3.6 – Exemplo de uma superfície de volatilidade implícita 72

Figura 3.7 – Gráfico do delta em função do VI da opção 73

Figura 4.1 – Metodologia Bayesiana 78

Figura 4.2 – Diferença entre as inferências clássica (parte superior) e bayesiana (parte inferior) 79

Figura 5.1 – Matriz de volatilidade implícita para opções de dólar em 10/05/2007 82

Figura 5.2 – Séries históricas das volatilidades implícitas para diferentes vencimentos.....84

Figura 5.3 – Planilha Base BBG.....97

Figura 5.4 – Planilha Inputs.....98

Figura 5.5 – Planilha RndGen.....99

Figura 5.6 – Planilha Bayes.....100

Figura 5.7 – Planilha LI – LS.....100

Figura 5.8 – Planilha de resultados.....101

Figura 6.1 – Resultados dos testes I.....105

Figura 6.2 – Resultados dos testes II.....106

Figura 6.3 – Resultado do teste III.....107

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Deutsche Bank – Dados do ano de 2005 24

Tabela 2.1 – Fatores determinadores do preço de uma opção 41

Tabela 2.2 – Vieses correspondentes às distribuições alternativas da Figura 2.8 62

Tabela 3.1 – Relação do delta com o valor da opção 72

Tabela 3.2 – Matriz de volatilidades implícitas – exemplo genérico 73

Tabela 5.1 – Parâmetros utilizados no teste de aderência de Pearson 86

Tabela 5.2 – Tabela de freqüências do teste de aderência de Pearson 87

Tabela 5.3 – Obtenção do CV a partir da avaliação do especialista 91

Tabela 5.4 – Exemplo de preenchimento da tabela de parâmetros 98

Tabela 6.1 – Configuração dos testes I 104

Tabela 6.2 – Configuração dos testes II 106

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

DB	Deutsche Bank
DI1	Depósito Interbancário de 1 dia
CDI	Certificado de Depósito Interbancário
CDB	Certificado de Depósito Bancário
NTN	Nota do Tesouro Nacional
LTN	Letra do Tesouro Nacional
LFT	Letra Financeira do Tesouro
NDF	*Non Deliverable Forward*
BM&F	Bolsa de Mercadorias & Futuros
P&L	*Profits & Losses*
VI	Valor Intrínseco
ATM	*At the money*
ITM	*In the money*
OTM	*Out of the money*
Bovespa	Bolsa de Valores de São Paulo
B&S	Black & Scholes
DTM	*Days to maturity*
IC	Intervalo de credibilidade
CV	Coeficiente de Variação
MS	Microsoft

LISTA DE SÍMBOLOS

S	preço corrente do ativo base
K	*strike* ou preço de exercício
t	intervalo de tempo até o vencimento, instante atual
r	taxa de juros básica
C	preço ou prêmio da *call*
P	preço ou prêmio da *put*
σ	volatilidade, desvio padrão
Δ	delta
u	taxa de valorização
d	taxa de desvalorização
ε	variável normalmente padronizada
μ	média, retorno
Var	variância
S_T	preço final do ativo base
f	preço ou prêmio de um derivativo
Π	valor da carteira
α	parâmetro de escala da distribuição gama
β	parâmetro de formato da distribuição gama
χ^2	estatística de teste de aderência de Pearson

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 23
1.1. Descrição da empresa 23
1.2. Detalhamento das áreas envolvidas 27
1.2.1. Global Markets Trading 27
1.2.2. Emerging Markets Strategy 29
1.3. Problema e motivação 30
1.4. Estrutura do trabalho 32
2. OPÇÕES 34
2.1. Derivativos 34
2.2. Definição e características principais 36
2.3. Fatores determinadores de preço 40
2.4. Precificação de opções 41
2.5. Modelo Binomial de Precificação 43
2.5.1. Modelo binomial de passo único 44
2.5.2. Modelo binomial de n-passos 47
2.6. Modelo de Black & Scholes 50
2.6.1. Processo Estocástico 50
2.6.2. Propriedade de Markov 51
2.6.3. Processo de Wiener 51
2.6.4. Lema de Itô 53
2.6.5. Modelo de comportamento dos preços das ações 54
2.6.6. Equação diferencial de Black & Scholes 56
2.6.7. Críticas ao modelo 60
3. VOLATILIDADE 63
3.1. Definição 63
3.2. Classificação 65
3.2.1. Volatilidade histórica 65
3.2.2. Volatilidade implícita 67
3.3. A superfície de volatilidade 68
3.3.1. Smile 69
3.3.2. Estrutura a Termo 70

3.3.3. Matriz de Volatilidade 71
4. ARGUMENTAÇÃO TEÓRICA 74
4.1. Teorema de Bayes 74
4.2. Metodologia Bayesiana 75
4.3. Inferência Bayesiana 78
4.3.1. Esperança a posteriori 80
4.3.2. Intervalo de credibilidade 80
5. CONSTRUÇÃO DO MODELO 81
5.1. Análise da variável objeto 81
5.1.1. Dados amostrais e fonte 81
5.1.2. Acurácia e seleção dos dados 83
5.1.3. Modelo estatístico adotado 84
5.2. Distribuição *a priori* 88
5.3. Distribuição *a posteriori* 92
5.4. Descrição do modelo 93
5.4.1. Objetivos do modelo 93
5.4.2. Setup do teste 94
5.4.3. Algoritmo 94
5.4.4. Apresentação das planilhas 96
6. ANÁLISE DOS RESULTADOS 102
7. CONCLUSÃO 108
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 111
REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES 112
ANEXO A – Macro "GeraResultados" 113
ANEXO B – Geração aleatória segundo uma normal 116

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento deste trabalho de formatura está contextuado dentro de uma experiência de estágio em um banco de investimentos. É notável o fato de que a presença do engenheiro de produção no mercado financeiro vem crescendo ano após ano. Tal crescimento pode ser explicado pelo reconhecimento por parte dos profissionais deste setor do surgimento de um profissional com uma forte capacidade analítica, visão sistêmica e habilidade em otimizar resultados. Estas características aliadas a uma forte base lógico-matemática, são trabalhadas exaustivamente ao longo deste curso de graduação.

Este trabalho de formatura busca evidenciar este fenômeno, ao identificar um problema concreto existente dentro de uma organização financeira e buscar solucioná-lo fazendo uso de ferramentas e métodos teóricos adquiridos no curso.

O capítulo 1 busca apresentar uma descrição sucinta da empresa onde o estágio e o estudo foram desenvolvidos, bem como das áreas específicas nas quais os mesmos estão inseridos. Também é conteúdo deste capítulo a definição do problema que motiva este trabalho e a estrutura segundo a qual o último está submetido, com uma breve explanação do que será abordado em cada um dos demais capítulos.

1.1. Descrição da empresa

A empresa a ser tratada corresponde ao Deutsche Bank S.A. – Banco Alemão, que, com sede em São Paulo, atua no Brasil como banco múltiplo oferecendo um amplo leque de serviços e produtos para clientes corporativos, incluindo complexas operações de *structured banking*.

Em parâmetros mundiais, o Deutsche Bank (DB) foi fundado em Berlim em 1870, com a proposta de "fazer negócios bancários de todos os tipos, em particular promover e facilitar relações comerciais entre a Alemanha, outros países europeus e mercados além-mar". O banco então adotou uma estratégia de expansão global, abrindo sua primeira agência internacional em Londres, em 1873.

Com uma história marcada por uma série de fusões e aquisições, bem como desincorporações ocorridas nos períodos das duas grandes guerras mundiais, o banco foi adquirindo dimensões

globais, tendo desde 2001 suas ações listadas na Bolsa de Nova York, a *New York Stock Exchange*.

Atualmente, o grupo Deutsche Bank oferece seus serviços mundialmente em 73 países para seus clientes em 2.287 filiais ou agências e é considerado uma das maiores instituições financeiras do mundo. A *Tabela 1.1* traz dados que refletem a grandeza do grupo:

Tabela 1.1 – Deutsche Bank - Dados do ano de 2005

Dados Financeiros	
Total de ativos	€ 992 bilhões
Total de receitas	€ 25,6 bilhões
Total de despesas administrativas	€ 19,2 bilhões
Receita Líquida	€ 3,5 bilhões
Base de Clientes (número de contas abertas)	
Corporate & Investment Banking (CIB)	54.812
PCAM:	
Private & Business	13.410.000
Private Wealth Management	123.000
Asset Management - Institutional	2.580
Asset Management - Retail	2.500.088
Corpo de Funcionários	
Global Headcount	63.247
Headcount por divisão do grupo DB:	
CIB	21.3%
PCAM	42.9%
Infrastructure	35.7%
Corporate Investments	0.1%

Fonte: Deustche Bank – *Interim report*, 31 de dezembro de 2005

O DB deu início a suas operações no Brasil sob o nome de "Deutsche Überseeische Bank" ou Banco Alemão Transatlântico no ano de 1911. Na época, o banco operava como banco comercial e tinha sua sede estabelecida na cidade do Rio de Janeiro. Mais tarde, também chegou a ter filiais em cidades como São Paulo, Santos, Curitiba, Porto Alegre e Salvador.

Fechado em função das duas guerras mundiais, a reabertura ocorreu a partir de recuperação de carta-patente em 1968, na praça de São Paulo. Após a incorporação completa do "Deutsche Überseeische Bank" em 1978, o Deutsche Bank passou a atuar no Brasil sob seu próprio nome.

O DB atua como subsidiária independente no Brasil desde 1994, sob o nome de Deutsche Bank S.A., recebendo neste mesmo ano a licença para atuar como banco múltiplo.

Nos últimos anos, o DB implementou uma estrutura bancária de atacado focalizada nos clientes para fornecer e organizar financiamentos, aconselhar na administração de riscos e executar estratégias financeiras, além de prover serviços de gerenciamento de investimentos internacionais.

Com o foco do negócio orientado por taxas e produtos internacionais, os clientes do DB são basicamente companhias multinacionais, grandes empresas e estatais com responsabilidades financeiras que necessitem de soluções internacionais, além de outras instituições financeiras.

O DB no Brasil conta atualmente com cerca de 190 funcionários e 30 estagiários, distribuídos entre as diversas áreas de negócio e de infra-estrutura. Um organograma representativo da distribuição organizacional da empresa pode ser observado na página seguinte, na *Figura 1.1*.

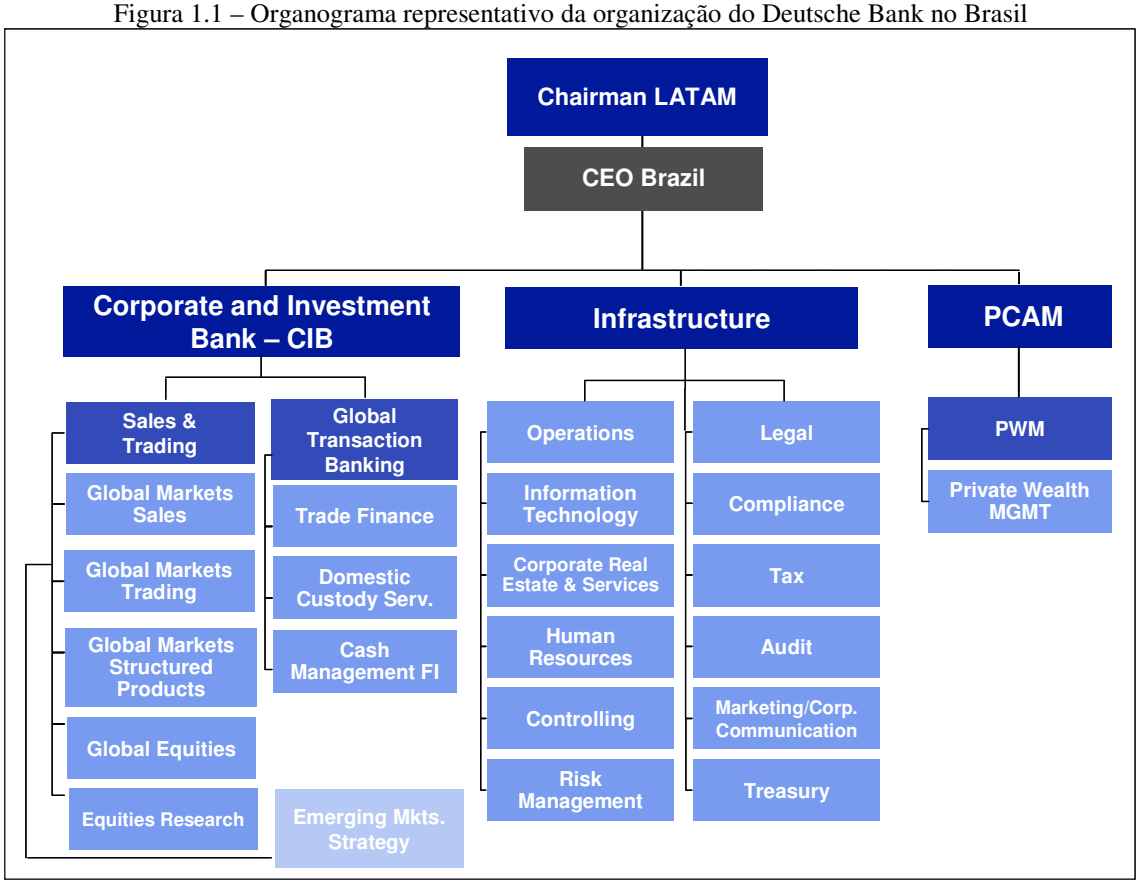
Dentre as áreas de negócio em que o DB atua no Brasil, valem destacar:

- *Global Markets*: grupo responsável por toda a originação, venda, negociação e *research* de ações, títulos conversíveis, câmbio, renda fixa (títulos de dívida local e externa) e derivativos em geral, negociados tanto em Bolsa quanto em mercado de balcão. Responsável também pela área de assessoria financeira englobando a originação e execução de transações de fusões e aquisições e de admissão, emissão e distribuição de ações.

- *Global Equities*: opera no Brasil sob o nome de Deutsche Bank Corretora de Valores S.A., seu departamento de *Equity Research* mantém uma equipe de analistas integrados na América Latina produzindo *research* de empresas brasileiras, dentro de um contexto dos mercados internacionais. Tem atuado com ênfase crescente em operações de mercado de capitais, como abertura de capital de empresas e ofertas novas de empresas já listadas.

- *Cash Management*: tem como atribuições a otimização da tesouraria e dos pagamentos e a eliminação da ineficiência do fluxo de caixa dos clientes que operam internacionalmente. O DB é reconhecido como líder nesta área, oferecendo aos clientes a capacidade de definir processos eficazes e eficientes de gerenciamento de caixa, mediante ganhos competitivos reais.

Figura 1.1 – Organograma representativo da organização do Deutsche Bank no Brasil



Fonte: Autor

- *Custody*: oferece soluções customizadas para a prestação de serviços de Custódia de Títulos e Valores Mobiliários, Custódia de Ações para Lastros DR's, Instituto de Previdências, Investidor Estrangeiro e Fundo de Recebíveis. Atualmente a Custódia do DB no Brasil administra um total de R$ 6,73 bilhões (dado de 2005), ocupando posição de destaque entre as instituições que oferecem este serviço no país.

- *Trade Finance*: oferece uma variedade de produtos voltados ao comércio exterior e à administração de risco, incluindo: cartas de crédito, garantias, cobranças, *forfaiting* e financiamentos de importação e exportação de curto prazo.

- *Private Wealth Management*: oferece consultoria e gestão global de investimento para indivíduos e famílias de patrimônio elevado. Também oferece soluções de planejamento sucessório e fiscal, através de estruturas fiduciárias nas mais diversas jurisdições.

1.2. Detalhamento das áreas envolvidas

O problema levantado neste trabalho, e que será descrito nas próximas seções, surgiu a partir de uma necessidade da área de *Global Markets Trading*, onde um de seus produtos negociados, a opção de taxa de câmbio, precisava de um tratamento mais confiável acerca de um de seus elementos de risco, a volatilidade.

Apesar de a demanda pela solução do problema ter surgido a partir desta área, o mesmo foi tratado como uma necessidade global e considerado como um diferencial estratégico para a empresa. Desta forma, foi inserido como um projeto na área de *Emerging Markets Strategy*, onde foi desenvolvido de fato ao longo deste ano.

Portanto, é conveniente detalhar mais a fundo as duas áreas citadas, explorando seus aspectos organizacionais e operacionais, tornando assim mais claro onde o problema toma espaço.

1.2.1. *Global Markets Trading*

É a área onde o estágio foi realizado, correspondente à mesa de operações do DB no Brasil. Parte integrante da tesouraria do banco, é responsável por administrar o capital próprio da empresa, o qual busca investir de tal forma a proporcionar retornos acima da rentabilidade média do mercado.

Trata-se de uma mesa exclusivamente de renda fixa, já que não lida com o mercado de renda variável voltado para recursos alocados em ações e seus respectivos derivativos. A mesa de operações do DB é composta por 9 profissionais, sendo 6 *traders* e 3 estagiários. Estes profissionais estão divididos segundo áreas de especialidade, correspondentes aos segmentos de atuação de cada um relacionados aos produtos pelos quais são responsáveis.

Os produtos financeiros tratados pela mesa de operações são de forma geral ativos e derivativos que são negociados na Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo, a BM&F, e nos mercados de balcão associados. Estes produtos podem ser agrupados segundo a seguinte classificação:

- *Mercado de Juros (PRE)*: DI1 Futuro, swap PRExCDI, contratos de CDI e CDB;
- *Títulos de Dívida/Inflação*: Notas do Tesouro Nacional (NTNs), LTN, LFT, Bonds;

- *Índice Bovespa Futuro*;
- *Mercado de Câmbio*: moedas estrangeiras em geral (Spot), Dólar Futuro, Cupom Cambial, NDF;
- *Mercado de Opções*: opções de taxa de câmbio e de juros.

Apesar de cada *trader* ser especializado em um grupo de produtos diferente, as atividades diárias seguem um padrão geral comum a todos. Cada um é responsável por um livro (*book*) no qual todas as operações que o mesmo realiza são registradas. Este livro representa nada mais do que uma carteira de investimentos, que carrega uma posição em diversos produtos que necessita ser controlada.

Utilizando-se de corretoras de valores terceirizadas para operar na BM&F, os *traders* negociam durante o dia os respectivos produtos através de operações básicas de compra e venda e buscam desta forma rentabilizar ao máximo o capital do banco. Obviamente esta rentabilidade é almejada de forma responsável, com o acompanhamento em tempo real por parte dos *traders* de suas posições, ou seja, realiza-se da maneira mais precisa possível a gestão do risco assumido por estas posições.

Outra forma de negociação ocorre através do relacionamento da área de *Global Markets Trading* com a área de *Global Markets Sales*, que atende os clientes do DB que desejem realizar diretamente com o banco alguma operação envolvendo qualquer um dos produtos acima citados. Vale ressaltar que estes clientes podem ser tanto investidores nacionais quanto estrangeiros, sendo esta versatilidade um dos grandes diferenciais de um banco global como o DB. Basicamente, o cliente chega à área de *Sales* com uma demanda por uma determinada operação, a qual repassa para a área de *Trading*, responsável então por cotar esta operação para o cliente, isto é, informar o preço pelo qual estaria disposta a assumir o risco por tal negociação. Fica então a critério do cliente o processo decisório de fechar ou não o negócio com o DB.

As demais atividades desta área são complementares às já citadas, porém fundamentais para a execução das mesmas. Alguns exemplos que valem ser citados são: o acompanhamento assíduo dos dados e tendências dos mercados nacional e internacional, a gestão do risco dos diversos livros (carteiras), cálculo e reporte do resultado diário e acumulado (*P&L* ou *Profits*

and Losses), gestão de caixa das diversas moedas envolvidas nas operações, controle de margens, corretagens e emolumentos, entre outros.

1.2.2. *Emerging Markets Strategy*

Como pode ser observado na *Figura 1.1*, esta área é diferenciada das demais. Trata-se de uma parte da empresa que trabalha em paralelo às demais áreas que estão sob o braço de *Sales & Trading* e que desenvolve atividades, como o próprio nome diz, consideradas estratégicas para o bom funcionamento destas áreas. É relevante a observação de que esta área não participa diretamente do fluxo de capital, já que tem um papel exclusivamente de apoio e coordenação.

Outro diferencial desta área é a forma como a mesma está posicionada dentro do grupo Deutsche Bank em termos globais. Sua equipe é composta por 3 profissionais: um funcionário e um estagiário, os quais estão alocados na unidade de São Paulo, e mais um funcionário que está alocado em Nova York. O mesmo formato se aplica aos demais países da América Latina considerados como mercados emergentes que também se reportam diretamente à Nova York. Um esquema ilustrativo pode ser observado na *Figura 1.2*.

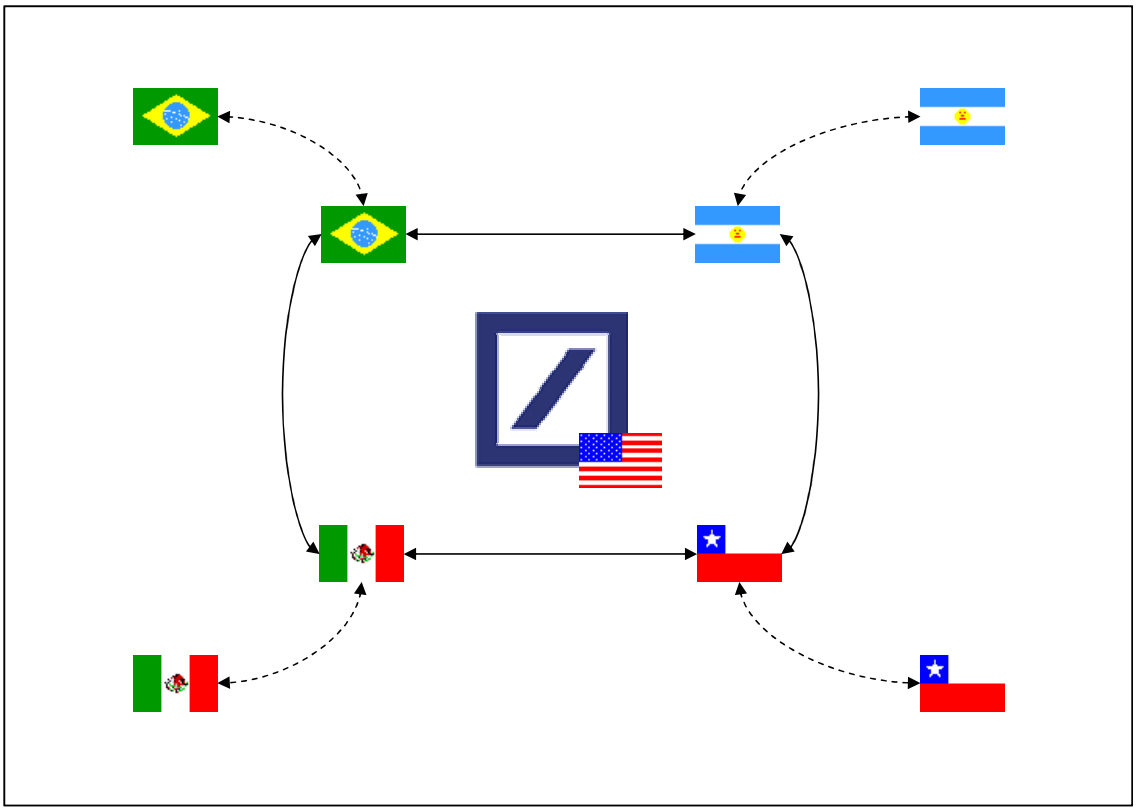
Apesar de atender primordialmente às demandas locais de seus países, as equipes de *Emerging Markets Strategy* possuem parte do seu pessoal em Nova York atuando em sinergia entre si, onde desenvolvem também projetos comuns aos diferentes mercados, que garantem uma atuação estratégica global. Essa é uma das características mais fortes do perfil de um banco mundial como o DB.

As atividades de forma geral não se aproximam em nada a uma rotina. Uma de suas funções que pode se distanciar um pouco desta afirmativa é a de garantir o alinhamento das diversas áreas com o perfil estratégico estabelecida pela empresa. Sua atuação nesse sentido consiste num processo de análise de resultados e cenários, geração de relatórios de *research* e promoção de reuniões periódicas entre os diretores das áreas associadas para discussão de estratégias.

Porém suas principais atividades consistem na condução de uma série de projetos, em geral oriundos dessas reuniões periódicas, que visam atender necessidades específicas das áreas cobertas pela área de *Emerging Markets Strategy* e que apresentem cunho estratégico, mas

que em função da carga excessiva de suas rotinas são colocadas muitas vezes em segundo plano.

Figura 1.2 – Relacionamento das equipes de *Emerging Markets Strategy*



Fonte: Autor

Tais projetos têm como características comuns um caráter de alta complexidade, longa duração e forte embasamento teórico. Alguns exemplos mais claros são: simulações de cenários de risco, otimização de carteiras, análises de dados históricos, análise da concorrência e projeções de indicadores e parâmetros relevantes.

1.3. Problema e motivação

É nesta configuração até então descrita que figura o desenvolvimento deste trabalho de formatura. Ao realizar estágio na área de *Global Markets Trading*, um dos pontos altos foi a possibilidade de entrar em contato e se familiarizar com os diversos produtos negociados pela empresa. Desta forma, abriu-se espaço para observar claramente a maneira como aspectos teóricos e práticos se relacionam e caminham juntos dentro de uma organização.

Dentre os vários produtos estudados nesta experiência, um deles merece ser destacado. As opções de taxa de câmbio são um tipo de derivativo que vem apresentando grande destaque

nos últimos anos, sendo atualmente o maior e mais líquido mercado de opções negociado no mundo.

Como todo mercado de opções, tem como característica intrínseca o grande número de variáveis que devem ser consideradas em sua precificação e gestão de riscos. Uma destas variáveis diz respeito à volatilidade, que de uma forma intuitiva pode ser definida como uma medida da velocidade de mudança do mercado. Ao lidar com opções, sejam elas de taxa de câmbio ou não, a importância do papel da volatilidade na negociação deste produto é gigantesca. Ao mesmo tempo em que é extremamente importante, é também muito complicada, principalmente por ser de difícil observação no mercado.

Com o passar do tempo, uma série de artifícios foram desenvolvidos pelos *players* de mercado ao lidar com opções. Tratar a volatilidade como uma variável implícita no preço das opções é um deles. Desta forma, volatilidades são deduzidas a partir dos preços das opções e vice-versa. O equilíbrio dinâmico é atingido num ponto de comum acordo do mercado acerca do valor desta volatilidade, ou seja, é como se os participantes concordassem num valor justo (*fair value*) para uma variável que não é de fato observável.

O consenso obtido acerca do valor justo desta volatilidade não deixa, no entanto, de ser uma opinião do mercado, que pode ou não ser fundamentada em dados objetivos. Quem negocia opções deve, portanto, ser capaz de analisar a conjuntura econômica que envolve o mercado em questão e avaliar se a volatilidade observada é de fato "justa". Ou seja, este negociador deverá emitir também sua opinião sobre esta volatilidade, exercitando desta forma um processo decisório individual.

Na posição de *market maker* como é reconhecido o DB, este deve ser capaz de cotar qualquer operação associada aos seus produtos de maneira competitiva, garantindo assim seu padrão de qualidade e satisfazendo seus clientes. E a crescente demanda por parte dos clientes por este produto – as opções de taxa de câmbio – despertou a necessidade de um tratamento mais aprimorado e dedicado na precificação do mesmo, o que remete diretamente à volatilidade considerada. Deseja-se ponderar a "opinião" do precificador deste tipo de opções de tal forma a agregar algum grau de conhecimento estatístico ao analisar a volatilidade observada.

O objetivo deste trabalho consiste em propor um modelo quantitativo que seja capaz de considerar tanto a informação proveniente de uma inferência estatística acerca desta volatilidade como também a informação possuída pelo negociador de opções, que consiste

numa opinião baseada na sua análise pessoal e subjetiva da volatilidade, porém também importante e que não deve ser descartada. O modelo será uma ferramenta que irá auxiliar o precificador das opções de taxa de câmbio a analisar de uma forma menos impessoal a volatilidade, sem no entanto recair a um método matemático que trate-a como uma variável totalmente previsível estatisticamente, o que é uma inverdade.

Ao aceitar o desafio, foi estudada e aprovada a proposta de desenvolver este trabalho junto à área de *Emerging Markets Strategy*, dada a importância do problema para a empresa. Desta forma, o trabalho foi tratado como parte da gama de projetos da área, recebendo apoio fundamental da equipe em paralelo à orientação por parte da Escola no desenvolvimento do mesmo.

1.4. Estrutura do trabalho

Esta seção tem o intuito de orientar a leitura deste trabalho, apresentando a forma como está organizado e uma breve descrição do conteúdo dos capítulos que o compõem:

- Capítulo 2 – busca-se contextualizar as opções dentro da vasta gama de produtos negociados no mercado, desde a definição de derivativos e até mesmo listando aqueles de maior importância atualmente. Faz-se então a conceituação das opções em si, englobando suas classificações, de que forma é feito o cálculo do retorno e quais as variáveis envolvidas. Por fim são tratados dois modelos de precificação de opções considerados relevantes para o estudo: o *Modelo Binomial de Precificação* e o *Modelo de Black & Scholes*.

- Capítulo 3 – aqui é introduzida a variável objeto de estudo deste trabalho. É conteúdo deste capítulo desde a definição da volatilidade propriamente dita até suas classificações, seu cálculo e de que forma é negociada no mercado. Sua relação com a precificação de opções também é posta em pauta, em especial com o modelo de B&S, e como ela é lidada na prática pelos profissionais do mercado.

- Capítulo 4 – é conteúdo deste capítulo apresentar em caráter introdutório a abordagem bayesiana e o detalhamento das ferramentas que serão utilizadas na construção do modelo. Para tanto, serão introduzidos os conceitos do Teorema de Bayes, a figura do especialista, as distribuições *a priori* e *a posteriori*, a função de verossimilhança, além dos estimadores

bayesianos utilizados, especificamente a esperança *a posteriori* (estimação pontual) e o intervalo de credibilidade (estimação por regiões).

- Capítulo 5 – aqui será detalhada a construção do modelo objetivo do trabalho. Será analisada a variável objeto considerada no problema, primeiro com relação aos dados da amostra coletados, com considerações acerca da fonte dos dados, sua acurácia e a justificativa da atribuição do modelo estatístico apropriado. Já com relação aos dados do especialista, uma discussão será conduzida sobre a obtenção desta informação e a sua tradução em termos dos parâmetros apriorísticos. Já a descrição do modelo propriamente dito está dividida em: objetivos do modelo, *setup* do teste, descrição do algoritmo e apresentação das planilhas.

- Capítulo 6 – este capítulo tem por objetivo validar o modelo desenvolvido no capítulo 5 ao verificar a coerência e acurácia dos resultados por ele gerados, bem como avaliar sua aplicação em situações reais de mercado. Para tanto, foram feitos diversos testes com o modelo que buscaram revelar seu comportamento frente a diferentes cenários.

- Capítulo 7 – neste capítulo é apresentada uma conclusão do trabalho, buscando integrar os pontos mais relevantes do estudo realizado.

2. OPÇÕES

Todo o estudo desenvolvido ao longo deste trabalho tem por objetivo final otimizar o tratamento despendido na precificação de um dos produtos financeiros negociados pela empresa em questão: as opções de taxa de câmbio. É objetivo deste capítulo, portanto, familiarizar o leitor com este produto, levantando de maneira introdutória alguns aspectos relevantes para o entendimento do funcionamento e da finalidade das opções no mercado de *trading* atual.

Num primeiro momento busca-se contextualizar as opções dentro da vasta gama de produtos negociados no mercado, desde a definição de derivativos e até mesmo listando aqueles de maior importância atualmente. Faz-se então a conceituação das opções em si, englobando suas classificações, de que forma é feito o cálculo do retorno e quais as variáveis envolvidas. Por fim são tratados dois modelos de precificação de opções considerados relevantes para o estudo: o *Modelo Binomial de Precificação* e o *Modelo de Black & Scholes*.

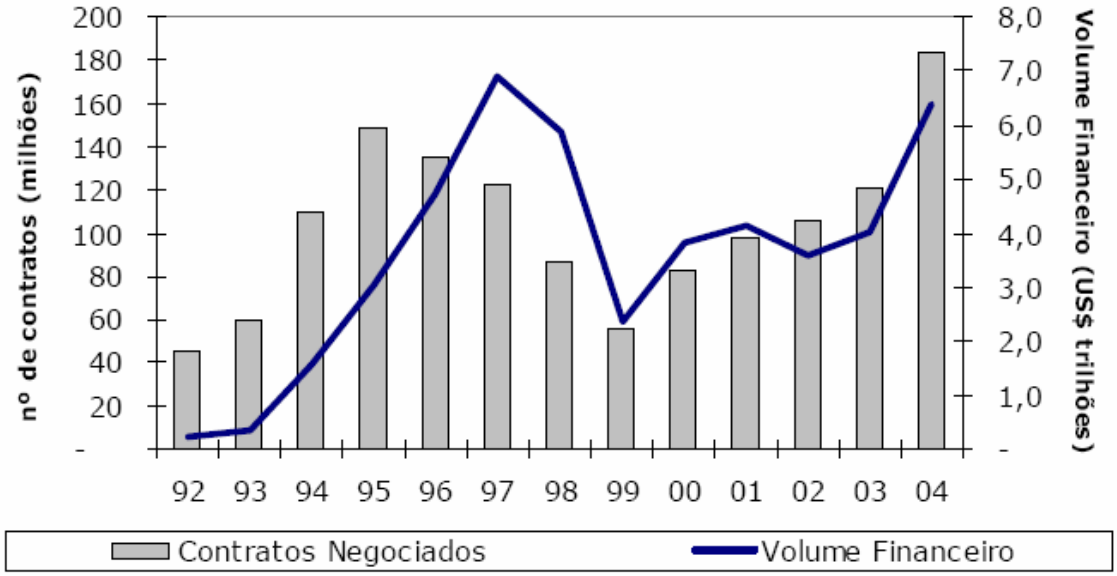
Vale ressaltar que apesar de o produto que motivou o estudo deste trabalho ter sido especificamente as opções de taxa de câmbio, toda a parte conceitual pode e foi desenvolvida da maneira mais genérica possível, podendo assim ser aplicada para outros tipos de opções existentes.

2.1. Derivativos

Um derivativo é um instrumento financeiro cujo valor depende dos valores de outras variáveis básicas que o referenciam. Neste sentido, o mercado de dólar é básico, pois sua cotação não tem dependência direta de outros mercados, mas sim da procura e oferta pela moeda. Ao passo que uma opção de compra de dólar (um tipo de derivativo) tem sua cotação derivando à cotação do dólar.

O mercado de derivativos tem crescido acentuadamente em volume de operações, isso pelo fato dele possibilitar às empresas e aos investidores um excelente gerenciamento de suas carteiras. Para se ter uma idéia, o gráfico da *Figura 2.1* mostra a quantidade de contratos e volumes financeiros negociados ao longo dos últimos anos na Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo, a BM&F:

Figura 2.1 – Volume negociado na BM&F no período de 1992 a 2004



Fonte: BM&F

Nestes últimos anos, os derivativos tornaram-se extremamente importantes para a área financeira como um todo. Futuros e opções são ativamente negociados em muitas Bolsas de Valores. Contratos a termo, *swaps* e diversos tipos de opções são transacionados regularmente entre instituições financeiras e seus clientes empresariais, em mercados denominados de balcão.

A seguir será feita uma breve explanação dos mais comuns tipos de derivativos, sem no entanto se adentrar muito em detalhes, já que isto não faz parte do escopo deste trabalho.

- *Contratos a termo*: trata-se de um acordo de compra ou venda de um ativo em determinada data futura, por um preço especificado na data em que o acordo é realizado, o *preço de entrega*. Desta forma, uma das partes assume uma posição comprada e a contraparte assume uma posição vendida no ativo. No início da operação o contrato a termo vale zero. Na data do vencimento a liquidação é dada pela diferença entre o preço de entrega e o preço de mercado do ativo vigente no dia. Em geral, os contratos a termo não são negociados em Bolsa, mas sim em mercados de balcão.

- *Contratos futuros*: como um contrato a termo, o contrato futuro é um acordo de compra ou venda de um ativo em determinada data futura, por um preço especificado. Diferentemente dos contratos a termo, o contrato futuro é negociado em Bolsa, seguindo as regras e mecanismos da mesma. As duas partes também não precisam necessariamente

se conhecer, ficando a cargo da Bolsa o cumprimento do contrato. Outra diferença é a não-especificação de uma data de entrega exata, sendo negociado apenas pelo seu mês de vencimento, onde a data exata de entrega do ativo é especificada pela Bolsa.

- *Opções*: dada sua importância para o trabalho, sua explicação mais detalhada será exposta no decorrer deste capítulo.

- *Swaps*: correspondem a uma estratégia financeira através da qual duas partes acordam em trocar fluxos de pagamentos futuros, cada qual associado a diferentes indexadores. O objetivo pode ser, por exemplo, trocar um passivo de taxa flutuante por um passivo de taxa fixa, ou ativos de taxa fixa por ativos de taxa flutuante e vice-versa. Ambas as taxas são aplicadas sobre um valor de referência do ativo (*notional*) estabelecido previamente entre as partes. Como ambos os pagamentos são realizados na mesma data, a liquidação na prática é feita pela diferença entre os valores de referência, devidamente corrigidos por cada uma das taxas. São em geral negociados em mercado de balcão.

2.2. Definição e características principais

O grande diferencial de uma opção em relação aos demais derivativos é o fato de que ela funciona como um contrato que proporciona ao seu titular o direito, e não a obrigação, de realizar uma operação sobre um ativo objeto em determinadas condições.

Há, portanto, dois tipos básicos de opção. Uma *opção de compra* (*call*) dá ao seu titular o direito de comprar o ativo objeto em certa data, por determinado preço. Já uma *opção de venda* (*put*) concede ao seu detentor o direito de vender o ativo objeto em certa data, por determinado preço. O preço acordado neste "contrato" é conhecido como *preço de exercício* (*strike*) e a data é tratada como *data de vencimento*.

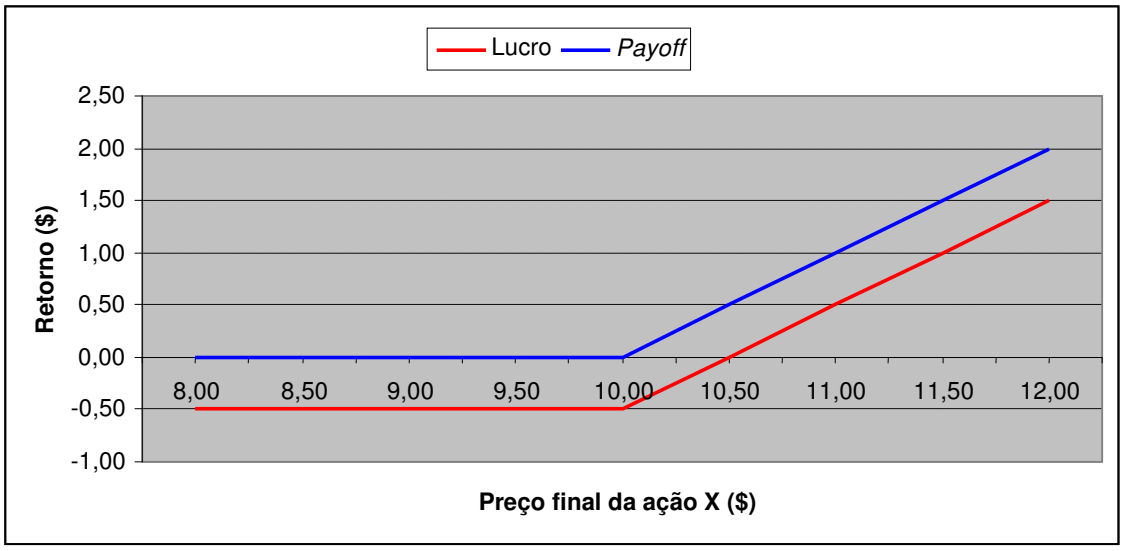
Embora não haja um custo para realizar um contrato a termo ou futuro, o mesmo não vale para um contrato de opções. Essa aparente vantagem de escolher pela ação de exercer a opção apenas quando esta lhe é vantajosa é obtida mediante o pagamento de um *prêmio*, que nada mais é do que o preço da opção. Mais adiante será avaliado de que forma é calculado este prêmio e quais fatores são observados para tanto.

A forma mais fácil de entender o mecanismo de uma opção é observar o retorno obtido pelo seu detentor na forma de um gráfico ilustrativo. Para tanto, segue o exemplo de um investidor que compra uma opção sobre uma ação X com as seguintes características:

- Tipo: *call*
- Strike: $10,00
- Prêmio: $0,50

Na data do vencimento da opção seu retorno é dado pelo gráfico da *Figura 2.2*:

Figura 2.2 – Gráfico do retorno da compra de uma *call*

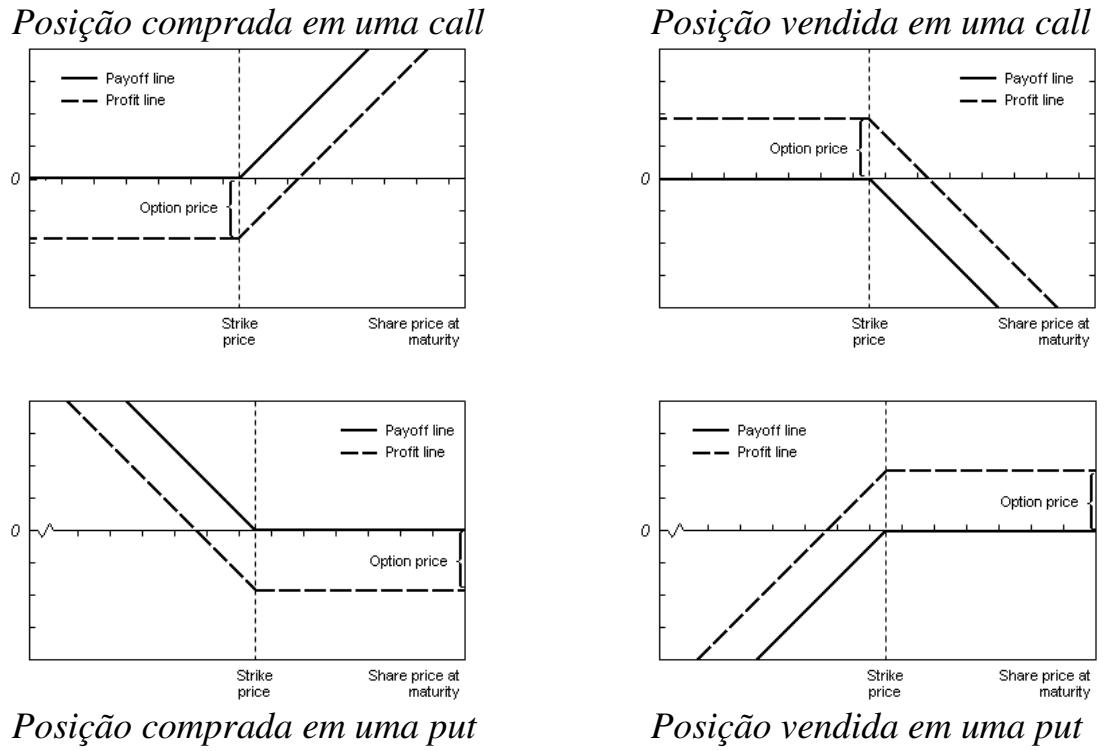


Fonte: Autor

Analisando mais a fundo o exemplo acima, note que caso o preço da ação X no vencimento seja menor que o preço de exercício (*strike*) da opção o investidor preferirá não exercê-la (não faz sentido comprar uma ação por $10,00 se é possível adquiri-la no mercado por um preço inferior). Neste caso ele perde apenas o investimento inicial correspondente ao prêmio da opção. Porém, se na data de vencimento da opção o preço da ação X no mercado estiver acima do valor do *strike*, o investidor optará por exercer essa opção e irá adquirir essa ação pelo preço de exercício combinado de $10,00 (pagando por esse direito adquirido o prêmio de $0,50) e poderá então vendê-la a preço de mercado, realizando lucro na operação. Note que o *break even point* corresponde exatamente ao preço de exercício somado ao prêmio pago, ou seja, o investidor irá obter lucro para valores da ação acima de $10,50.

Todas as possíveis situações estão resumidas no quadro da *Figura 2.3*, refletindo tanto a posição do investidor (dito comprado na opção) quanto do lançador (vendido na opção):

Figura 2.3 – Resumo das possíveis posições assumidas numa opção



Fonte: Wikipedia

Nos gráficos da *Figura 2.3* a linha designada por *payoff* da opção, como é conhecida pelo seu termo em inglês, corresponde a uma característica das opções que irá se revelar de extrema importância nas análises posteriores, denominada *valor intrínseco* (VI) da opção. O VI representa o quanto vale a opção no momento em que a mesma for exercida. Seja S o preço do ativo base e K o *strike* da opção:

$$Call \rightarrow VI = \max(0, S - K) \qquad Put \rightarrow VI = \max(0, K - S)$$

As opções também costumam ser classificadas segundo certos critérios, dentre os quais valem destacar:

- Momento do exercício: são ditas *opções americanas* aquelas que podem ser exercidas a qualquer instante até a data do vencimento, enquanto que as *opções européias* podem ser exercidas apenas na data de vencimento. Note que os termos *americanas* e *européias* não dizem respeito à localização da opção ou da Bolsa. No Brasil, a grande maioria das opções negociadas em Bolsa é européia. Tal fato, aliado ao argumento de que as opções

européias são mais simples de analisar do que as americanas, justifica o tratamento apenas de opções européias ao longo deste trabalho.

- Relação preço de exercício / preço do ativo: uma opção é considerada *"at the money"* (ATM) ou "*no dinheiro"* quando seu preço de exercício é igual ao preço do ativo objeto. Uma opção denominada *"in the money"* (ITM) ou *"dentro do dinheiro"* é aquela que possui valor intrínseco positivo, ou seja, seu preço de exercício é inferior ao preço corrente do ativo base no caso de uma *call* e superior no caso de uma *put*. Já uma opção que é dita *"out of the money"* (OTM) ou *"fora do dinheiro"* possui valor intrínseco nulo e seu preço de exercício está acima do preço corrente do ativo objeto no caso de uma *call* e abaixo no caso de uma *put*.

- Flexibilidade dos contratos: este critério diz respeito em especial às opções negociadas no Brasil, onde as *opções listadas* são aquelas negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) ou na Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F) e que estão sujeitas às padronizações determinadas pelas mesmas, no que diz respeito a aspectos contratuais e operacionais. As *opções flexíveis* são negociadas tanto nas Bolsas como em mercados de balcão, porém aspectos como o preço de exercício e a data de vencimento são definidos pelas duas partes envolvidas nas operação.

- Tipo de ativo objeto: este critério está muito além de classificador das opções, ele faz com que as opções tornem-se produtos de naturezas distintas. Apesar do conceito desenvolvido ser o mesmo, isto é, todas as características já tratadas aqui e a maior parte do que ainda será tratado valerem para todas as opções, ao lidar com ativos objetos diferentes estar-se-á lidando com mercados distintos, que apresentam características peculiares atreladas a estes mercados. Tais características não podem ser deixadas de lado e deverão ser consideradas em algum momento na análise das opções. Por exemplo, uma opção de ação deverá considerar a distribuição de dividendos associada a essa ação em sua precificação, da mesma forma que uma opção de taxa de câmbio deverá levar em conta as diferentes taxas de juros básicas dos dois países envolvidos na taxa de câmbio envolvida. Os principais ativos objeto incluem ações, índices de ações, moedas, instrumentos de dívida, *commodities* e contratos futuros.

2.3. Fatores determinadores de preço

De uma forma geral, há cinco fatores que afetam o preço de uma opção:

- O preço corrente do ativo objeto;
- O preço de exercício (*strike*);
- A volatilidade do preço do ativo objeto;
- O tempo até o vencimento;
- A taxa de juro livre de risco.

Uma análise interessante a ser feita para compreender o mecanismo de precificação das opções corresponde a considerar o que acontece com o seu preço quando um destes fatores muda, *ceteris paribus*.

O preço do ativo objeto e o preço de exercício

Estes dois fatores podem ser tratados juntos se considerado o valor intrínseco da opção. Uma opção tem mais valor quanto maior for o seu VI. No caso de uma *call*, esta terá mais valor quanto maior for o preço do ativo e quanto menor for o seu *strike*. Já uma *put* terá mais valor quanto menor for o preço do ativo e quanto maior for o seu *strike*.

A volatilidade

A grosso modo, a volatilidade do preço do ativo base pode ser definida como uma medida de quão incerto está o mercado com relação aos movimentos futuros no seu preço. Quanto maior a volatilidade, maior é a possibilidade deste ativo apresentar preços muito altos ou muito baixos. Se considerados os detentores de uma opção associada a este ativo, indiferentemente seja ela uma *call* ou uma *put*, essa volatilidade aumenta a possibilidade de um resultado excepcional e, devido ao fato de as perdas serem limitadas (vide a *Figura 2.3*) para o detentor de uma opção, o aumento da volatilidade implica num aumento direto no preço da mesma.

O tempo até o vencimento

Não que seja uma medida de incerteza como a volatilidade, mas é um tanto óbvio que quanto maior o prazo para o vencimento da opção, menos se sabe sobre o valor futuro do preço do ativo objeto, já que abre-se espaço para um maior número de acontecimentos mudarem a direção do mercado. No caso específico das opções americanas há ainda o fato de que quanto maior o tempo até o vencimento, maiores as oportunidade de exercício por parte de seus detentores, tornando-as ainda mais valiosas.

A taxa de juros livre de risco

Este fator afeta o preço das opções de uma forma menos intuitiva que os demais já citados. Na prática, quando crescem as taxas de juros, a taxa de crescimento esperada dos preços dos ativos também tende a aumentar, no entanto diminui o valor de quaisquer fluxos de caixa a serem recebidos pelo titular da opção no futuro. Ambos os efeitos desvalorizam o preço de uma *put*. No caso de uma *call*, o primeiro efeito tende a aumentar seu preço e o segundo, a diminuí-lo. Porém o primeiro efeito prevalece sobre o segundo, fazendo com que o preço de uma *call* aumente com a elevação dos juros.

Os resultados discutidos podem ser resumidos na *Tabela 2.1*, que representa o efeito do aumento em uma variável, sobre o preço de uma opção, enquanto as demais se mantêm constantes. As considerações valem tanto para opções européias como para opções americanas.

Tabela 2.1 – Fatores determinadores do preço de uma opção

Variável	**CALL**	**PUT**
Preço do ativo	+	–
Preço de exercício (*strike*)	–	+
Tempo para o vencimento	+	+
Volatilidade	+	+
Taxa livre de risco	+	–

Fonte: Autor - adaptado de Hull (1997)

2.4. Precificação de opções

Como já foi dito, todo este trabalho foi desenvolvido com o intuito final de otimizar o processo de precificação de opções, um produto que vem ganhando cada vez mais

importância no mercado de derivativos brasileiro e também em níveis globais, sendo, portanto, considerado de cunho estratégico para a empresa na qual foi feito o estágio.

A teoria de precificação de opções é bastante vasta e desenvolvida, dada a sua extrema complexidade. As dificuldades surgem principalmente do fato de que grande parte das informações necessárias para a realização desta tarefa é de caráter probabilístico e de difícil obtenção.

Na seção 2.3 foram introduzidos quais fatores influenciam na precificação de opções. Além disso, uma análise de sensibilidade foi feita buscando mostrar o efeito de cada um deles ao se determinar qual o prêmio a ser pago por uma dada opção. Porém, tal análise foi totalmente subjetiva e qualitativa, tendo por objetivo apenas explorar que existe uma série de variáveis que afetam os preços das opções e despertar o sentimento de que sua mensuração não parece ser uma tarefa fácil.

Parte-se então para uma etapa mais quantitativa deste capítulo, onde serão descritos nas próximas seções dois dos principais modelos de precificação de opções trazidos pela literatura. Ambos foram desenvolvidos tomando como ativo base uma ação que não distribui dividendos. Porém a análise pode ser facilmente estendida para outros ativos, às vezes passível de pequenas alterações decorrentes de características específicas atreladas a estes ativos, mas que não compromete de forma alguma a teoria desenvolvida. Para tanto, antes de prosseguir alguns pressupostos e notações que são comuns aos dois modelos precisam ser levantados.

Suposições

- não há custos de transação;
- todos os lucros (líquidos de perdas) estão sujeitos à mesma tributação;
- sempre é possível comprar ou vender o ativo em questão e sua negociação se dá de forma contínua;
- não há dividendos durante a vida do derivativo;
- os participantes podem captar ou emprestar dinheiro a uma mesma taxa de juros livre de risco;

- as oportunidades de arbitragem são aproveitadas conforme surgem.

Notações

- ***S*:** preço atual do ativo base;
- ***K*:** preço de exercício (*strike*) da opção;
- ***t*:** intervalo de tempo até o vencimento da opção;
- ***r*:** taxa de juros básica [$r = (1 + \text{taxa})$];
- ***C*:** preço da *call*;
- ***P*:** preço da *put*;
- **σ:** volatilidade do preço do ativo base.

2.5. Modelo Binomial de Precificação

A abordagem aqui utilizada faz referência a um importante estudo feito por Cox, Ross, e Rubinstein (1979). Este modelo faz uso das chamadas *árvores binomiais*, uma técnica útil e bastante popular não apenas para precificar opções e outros derivativos inclusive, mas também em outros campos do estudo quantitativo, como por exemplo os modelos de árvores de decisão.

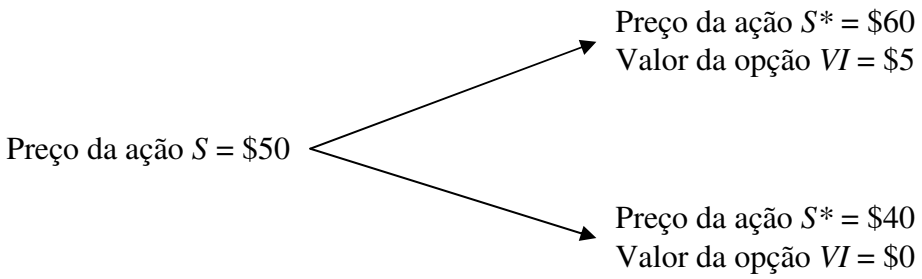
Seu trunfo consiste em sua simplicidade frente a outros modelos mais utilizados, dado que lida essencialmente com variáveis de tempo discretas. Além disso, como será demonstrado mais adiante, sua formulação converge para o resultado obtido por Black & Scholes (1973) – modelo de variáveis contínuas mais consagrado – à medida que o número de passos de tempo aumenta.

Outro aspecto que valida ainda mais sua importância para o estudo de opções é a capacidade que o modelo tem de evidenciar um princípio importante, conhecido como *avaliação neutra ao risco*.

2.5.1. *Modelo binomial de passo único*

Inicialmente, considere uma situação simples, na qual uma ação, cujo preço atual é S = \$50, possa atingir ao final de um mês tanto S^* = \$40 quanto S^* = \$60. Imagine agora que deseja-se avaliar uma *call* dessa ação para o prazo de um mês cujo *strike* seja K = \$55. Se no vencimento o preço da ação for \$60, o VI da opção será \$5; se for \$40, seu VI será zero. Esta situação está descrita na figura abaixo:

Figura 2.4 – Movimentos do preço da ação e da opção em exemplo numérico



Fonte: Autor - adaptado de Cox, Ross e Rubinstein (1979)

Uma maneira simples de precificar essa opção seria considerar uma carteira composta pela ação e pela opção, de modo que não haja incerteza quanto ao seu valor ao final de um mês. Seja uma carteira composta de uma posição comprada em Δ ações e de uma posição vendida em 1 opção de compra (*call*). Se o preço da ação subir a 60, o valor das ações será 60Δ, o custo da opção 5 e o valor da carteira $60\Delta - 5$. Se o preço da ação cair para 40, o valor das ações será 40Δ, o valor da opção será zero e o valor da carteira 40Δ. A carteira estará livre de risco se:

$$60\Delta - 5 = 40\Delta$$

$$\Delta = 0{,}25$$

Portanto, uma carteira sem risco estará comprada em 0,25 ação e vendida em 1 opção. Independente do movimento do preço da ação, o valor da carteira será sempre de:

$$60 \times 0{,}25 - 5 = 40 \times 0{,}25 = 10$$

Como foi assumido que não há oportunidades de arbitragem, carteiras sem risco devem render à taxa de juros livre de risco. Supondo que esta taxa seja de 10% ao ano, o valor da carteira hoje deverá ser o valor presente de 10, ou:

$$10 \text{ x } (1 + 0{,}10)^{-1/12} = 9{,}92$$

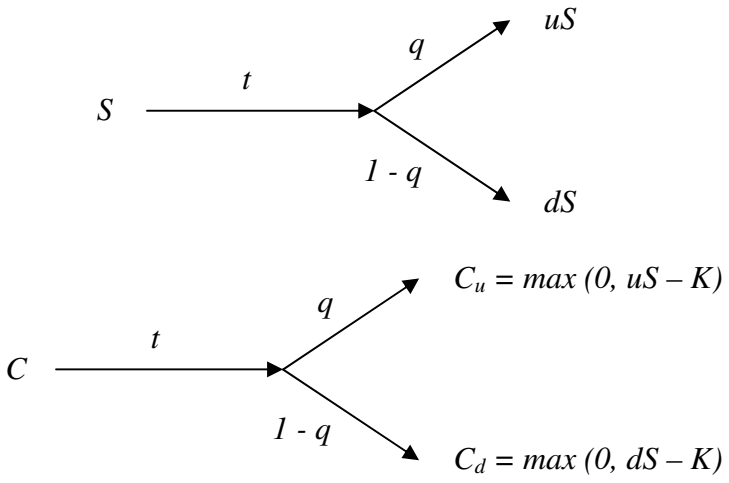
Como o preço da ação hoje é de \$50 e supondo que o preço da opção seja *C*, tem-se que:

$$50 \text{ x } 0{,}25 - C = 9{,}92$$

$$C = 2{,}58$$

A idéia básica do modelo de Cox, Ross e Rubinstein (1979) não foge muito à estrutura deste simples exemplo. Generalizando a teoria utilizada, considere uma carteira livre de risco composta por uma posição comprada em Δ ações, cujo preço atual seja *S*, e uma posição vendida em 1 opção de compra (*call*), cujo preço seja *C*. Suponha ainda que existam apenas dois movimentos possíveis com o preço da ação ao fim de um período *t*: que ela valorize à taxa de *(u – 1)* ao nível de *uS* com probabilidade *q*, ou desvalorize à taxa de *(d – 1)* ao nível de *dS* com probabilidade *(1 – q)*. O movimento de valorização faria com que a opção valesse C_u e o de desvalorização com que valesse C_d. Tais movimentos estão representados no diagrama da *Figura 2.5*:

Figura 2.5 – Movimentos do preço da ação e da opção em exemplo genérico



Fonte: Autor - adaptado de Cox, Ross e Rubinstein (1979)

Note que para manter consistente o pressuposto da não-arbitragem ao longo de um período *t*, é necessário que $d < r < u$.

O valor da carteira ao fim do período *t* será, portanto, $\Delta uS - C_u$ caso haja um movimento de valorização do preço da ação e $\Delta dS - C_d$ no caso de desvalorização da mesma. Dado que a

carteira é livre de risco, seu valor ao fim do período *t* será o mesmo independente do que venha a acontecer. Portanto:

$$\Delta uS - Cu = \Delta dS - Cd$$

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} \tag{2.1}$$

A relação (2.1) diz qual deve ser a escolha de Δ para que a carteira apresente risco nulo. A suposição de não-arbitragem faz com que carteiras sem risco rendam à taxa de juros livre de risco. Trazendo a valor presente o valor da carteira pela taxa de juros básica:

$$\Delta S - C = (\Delta uS - C_u) \cdot r^{-t}$$

onde com uma simples manipulação matemática conclui-se que:

$$C = r^{-t} \cdot (pC_u + (1-p) \cdot C_d) \tag{2.2}$$

onde define-se:

$$p = \frac{r^t - d}{u-d} \qquad \text{e} \qquad 1-p = \frac{u-r^t}{u-d}$$

A equação (2.2) apresenta uma série de propriedades notáveis. Primeiramente, a probabilidade *q* não aparece na fórmula, revelando que ainda que diferentes investidores tenham diferentes sentimentos a respeito das probabilidades de movimentos de valorização ou desvalorização da ação, eles iriam concordar na relação de *C* com *S*, *u*, *d* e *r*.

Além disso, o valor de *C* representa o *"fair value"*, no termo em inglês, ou o *preço justo* da opção. E isso independe do comportamento dos investidores frente ao risco, ou seja, ainda que os investidores tivessem aversão ao risco ou mesmo propensão a ele, o valor obtido para *C* seria o mesmo.

Também é notável que a única variável aleatória da qual o modelo depende é o preço da ação *S*. Em particular, não depende da variação do preço de outros ativos ou de outros parâmetros, sendo que através da fórmula (2.2) é possível inclusive obter lucros através de arbitragens em cima de preços de equilíbrio de carteiras que eventualmente possam incluir outras variáveis além das aqui citadas.

Por fim, observa-se que p é definido no intervalo (0,1) e apresenta, portanto, propriedades de probabilidade. De fato, p representa o valor de q num equilíbrio em que os investidores fossem todos neutros ao risco. Isso pode ser facilmente demonstrado se for imposto que o retorno esperado da ação seja a taxa livre de risco:

$$q(uS) + (1 - q)(dS) = r^t S$$

$$q = (r^t - d)/(u - d) = p$$

2.5.2. *Modelo binomial de n-passos*

Agora considere uma nova situação, ainda simples, na qual existem dois períodos de tempo t até o vencimento da *call*. Mantendo as mesmas suposições e estrutura desenvolvidas no modelo binomial de passo único, o preço da ação e o valor da opção após dois períodos são dados por:

Utilizando o resultado obtido em (2.2), os valores de C_u e C_d saem naturalmente:

$$C_u = r^{-t} \cdot \left(pC_{uu} + (1-p) \cdot C_{ud} \right) \tag{2.3}$$

e

$$C_d = r^{-t} \cdot \left(pC_{ud} + (1-p) \cdot C_{dd} \right) \tag{2.4}$$

Substituindo em (2.2) os valores obtidos em (2.3) e (2.4), tem-se que:

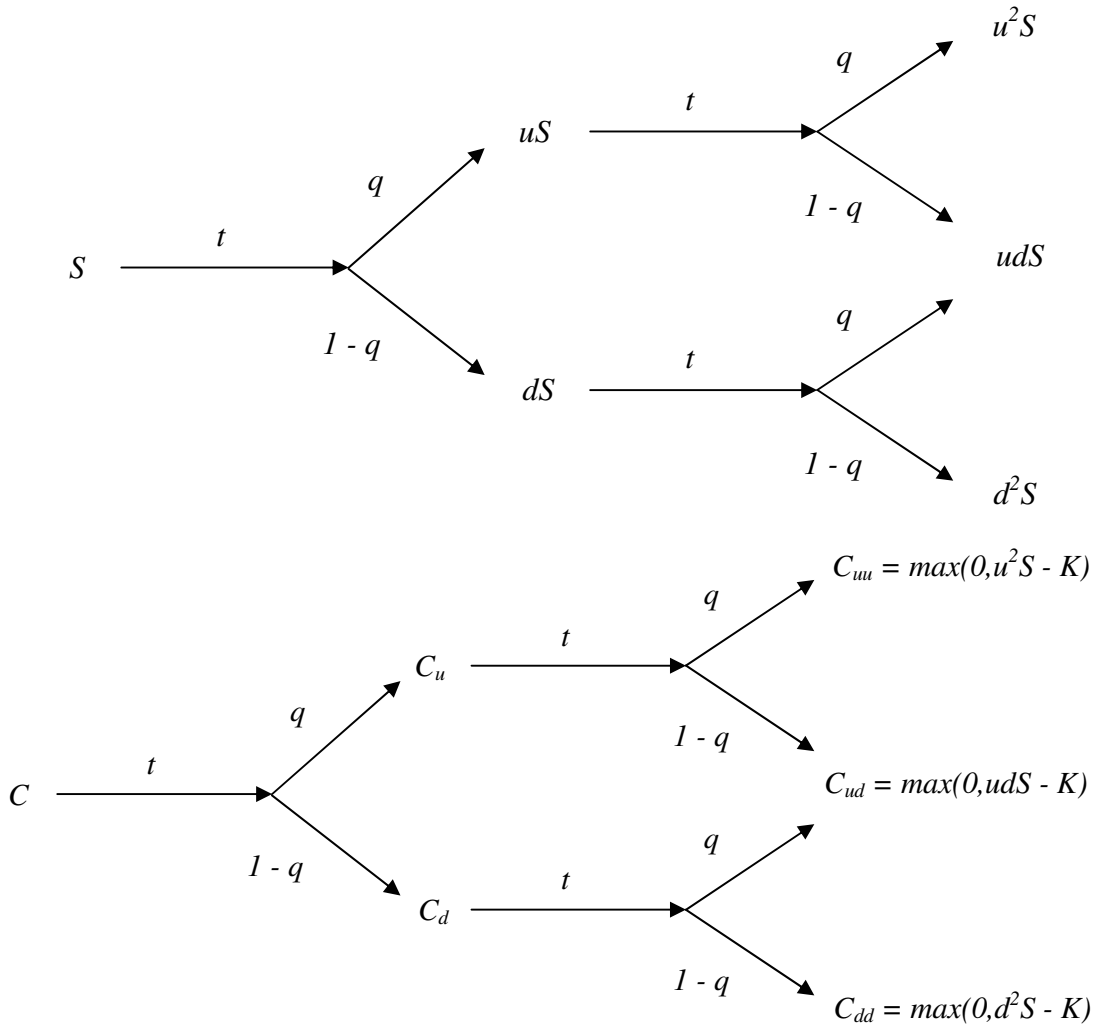
$$C = r^{-2T} \cdot \left(p^2 C_{uu} + 2p \cdot (1-p) \cdot C_{ud} + (1-p)^2 \cdot C_{dd} \right) \tag{2.5}$$

O resultado adquirido em (2.5) corresponde ao preço de uma *call* considerando que há dois períodos t até seu vencimento. Estendendo o procedimento para n períodos, ou seja, iniciando na data do vencimento e voltando período a período, a fórmula geral pode ser definida como:

$$C = r^{-nt} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \cdot \max\left(0, u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - K\right) \right) \tag{2.6}$$

A equação (2.6) já representa a fórmula completa, porém ainda é possível reescrevê-la de outro modo que poder vir a ser mais conveniente.

Figura 2.6 – Movimentos do preço da ação e da opção em exemplo genérico (dois passos)



Fonte: Autor - adaptado de Cox, Ross e Rubinstein (1979)

Definindo a como o número mínimo de movimentos de valorização necessários para que após os n períodos a *call* termine *in the money*, ou seja, que seu valor intrínseco seja não-nulo (VI > 0). Se $j < a$, então:

$$u^j \cdot d^{n-j} \cdot S \leq K \quad \rightarrow \quad u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - K \leq 0 \quad \rightarrow \quad \max\left(0, u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - K\right) = 0 \quad \rightarrow \quad C = 0$$

Portanto, a é o menor inteiro não-negativo que satisfaz $u^j \cdot d^{n-j} \cdot S > K$. Desta maneira, a é dado por:

$$a = \left\langle \frac{\log\left(\frac{K}{S \cdot d^n}\right)}{\log\left(\frac{u}{d}\right)} \right\rangle$$

onde $\langle x \rangle$ denota o menor inteiro não-negativo maior que *x*.

Note que se $a > n$, a *call* terminará *out of the money* mesmo que a ação valorize-se em todos os períodos, fazendo com que seu valor seja zero.

Mas se $j \geq a$, então:

$$\max\left(0, u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - K\right) = u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - K$$

Reformulando o modelo após o cálculo de *a*, tem-se que:

$$C = r^{-nt} \cdot \left(\sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \cdot \left(u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - K\right) \right) \tag{2.7}$$

Com um pouco de álgebra é possível ainda separar a equação (2.7) em dois termos, da seguinte maneira:

$$C = S \cdot \left[\sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \cdot \left(\frac{u^j \cdot d^{n-j}}{r^{nt}} \right) \right] - K \cdot r^{-nt} \cdot \left[\sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \right] \tag{2.8}$$

Dado que a função de distribuição binomial costuma ser denotada por:

$$\phi(x, y, z) = \sum_{j=x}^{y} \binom{y}{j} \cdot z^j \cdot (1-z)^{y-j}$$

a expressão (2.8) pode ser reescrita como se segue:

$$C = S \cdot \phi(a, n, p') - K \cdot r^{-nt} \cdot \phi(a, n, p) \tag{2.9}$$

onde

$$p = \frac{r^t - d}{u - d} \quad , \quad p' = \left(\frac{u}{r^t} \right) \cdot p \quad \text{e} \quad a = \left\langle \frac{\log\left(\frac{K}{S \cdot d^n} \right)}{\log\left(\frac{u}{d} \right)} \right\rangle$$

A expressão (2.9) corresponde à forma mais conhecida do modelo de precificação binomial de Cox, Ross e Rubinstein (1979).

2.6. Modelo de Black & Scholes

Black & Scholes (1973) é até hoje o mais importante estudo publicado sobre a precificação de opções, onde os autores derivaram uma equação diferencial que deve ser satisfeita pelo preço de qualquer derivativo dependente de uma ação sem dividendos. Da mesma forma que em análises anteriores deste trabalho, vale informar que apesar do estudo aqui apresentado ter sido desenvolvido tomando como ativo base uma ação sem dividendos, os resultados são válidos também para outros ativos, passíveis de eventuais ajustes que não comprometem a teoria aqui explicitada.

A dedução desta equação que compõe o modelo de Black & Scholes (B&S) é conteúdo desta etapa do trabalho, que vai desde a conceituação das ferramentas de cálculo utilizadas para chegar a um modelo adequado de comportamento dos preços das ações culminando com as fórmulas de precificação de opções obtidas a partir da resolução da equação diferencial deduzida.

O modelo de B&S é, desde que foi publicado em 1973, de longe o mais aceito e utilizado por profissionais do mercado de derivativos, em especial de opções. Os prós e contras que envolvem sua polêmica popularidade também são discutidos mais ao final, na seção 2.6.7, onde uma série de críticas ao modelo apresentado são levantadas.

2.6.1. *Processo Estocástico*

Antes de mais nada, para entender o modelo de precificação de B&S é necessário compreender o cálculo envolvido, que remete a este processo considerado por muitos um tanto quanto complexo, porém extremamente rico e que se mostrou bastante eficaz ao se lidar com opções e outros derivativos mais elaborados.

É dito que uma variável segue um *processo estocástico* quando seu valor muda de maneira incerta no tempo. Uma prática comum consiste em classificar este processo em *tempo discreto*, onde o valor da variável pode mudar em apenas determinados pontos fixos no tempo, ou em *tempo contínuo*, onde essas mudanças podem ocorrer a qualquer instante. Os processos estocásticos podem ainda ser classificados como de *variável contínua*, quando a variável objeto pode assumir qualquer valor dentro de um certo intervalo, ou de *variável discreta*, quando pode assumir apenas determinados valores discretos.

A seguir será derivado um processo estocástico para os preços das ações, porém como já foi dito anteriormente a análise estende-se facilmente para os demais ativos objeto já citados. Será apresentado o que é conhecido por *cálculo estocástico*, que nada mais é do que uma extensão dos procedimentos de cálculo que trata de um processo estocástico em tempo contínuo com variável contínua.

2.6.2. *Propriedade de Markov*

A propriedade de Markov diz que apenas o valor corrente de uma variável é relevante para prever o futuro, seu histórico e a maneira como o presente emergiu do passado não são considerados relevantes. Um processo estocástico que segue essa propriedade é chamado de *processo de Markov*.

Os preços das ações supostamente acompanham o processo de Markov, onde a única informação relevante está no preço atual da ação. As previsões para o futuro acerca do preço de uma ação dependem apenas desta informação e devem ser expressas em termos de distribuição de probabilidade.

Esta propriedade é consistente com aquilo que é conhecido como forma fraca de eficiência de mercado, que afirma que o preço atual de um ativo já absorve todas as informações decorrentes do seu histórico de preços. A própria competição do mercado garante isso, fazendo com que caso um eventual padrão a respeito do preço de uma ação pudesse ser deduzido, o mesmo seria feito por vários investidores, e a própria oferta ou demanda excessiva por essa ação trataria rapidamente de eliminá-lo.

2.6.3. *Processo de Wiener*

Trata-se de um tipo específico de processo estocástico de Markov utilizado em especial no campo da física experimental para descrever o denominado movimento *browniano* geométrico, que corresponde ao movimento de uma partícula sujeita a uma grande quantidade de choques moleculares. Os modelos de comportamento dos preços das ações são comumente expressos em termos destes processos de Wiener.

Seja z uma variável que segue o processo de Wiener e Δz a mudança de z num pequeno intervalo de tempo Δt. Há, portanto, duas propriedades básicas que z deve ter para que isso seja verdade:

- ***Propriedade 1*:** vale a seguinte relação:

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.10}$$

onde ε é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão, ou seja, uma distribuição normal com média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = 1$.

- ***Propriedade 2*:** os valores de Δz, para quaisquer dois pequenos intervalos de tempo Δt distintos, são independentes.

Segundo a propriedade 1, a distribuição de Δz é dada por:

$$\Delta z \sim N(0, \Delta t)$$

onde $N(\mu, \sigma^2)$ denota uma distribuição normal de média μ e variância σ^2.

Já a propriedade 2 garante que Δz siga o processo de Markov.

Para obter o processo de Wiener propriamente dito, considera-se a situação limite onde $\Delta t \to 0$. De forma análoga aos procedimentos comuns de cálculo, é possível definir o limite da equação (2.10) como:

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \tag{2.11}$$

Mais adiante, o *processo generalizado de Wiener* para uma variável x é definido da seguinte forma:

$$dx = adt + bdz \tag{2.12}$$

onde a e b são constantes e dz corresponde ao processo de Wiener básico definido em (2.11).

Para entender melhor a equação (2.12) é conveniente analisar os dois termos do lado direito da equação separadamente, introduzindo dois conceitos importantes. O termo adt implica que a *taxa de desvio* esperada de x é dada por a. Sem o termo bdz, a equação torna-se:

$$dx = adt \quad \to \quad \frac{dx}{dt} = a \quad \to \quad x = x_0 + at$$

onde x_o é o valor de x no instante inicial. Isso implica que num intervalo de tempo de extensão T, x aumenta por um valor aT. Já o termo bdz agrega ruído ou variabilidade à trajetória de x, donde é possível concluir que a *taxa de variância* de x é dada por b^2. Isso pode ser mais fácil de observar ao analisar as equações (2.11) e (2.12) conjuntamente:

$$dx = adt + b\varepsilon\sqrt{dt}$$

Assim, a distribuição de dx é dada por:

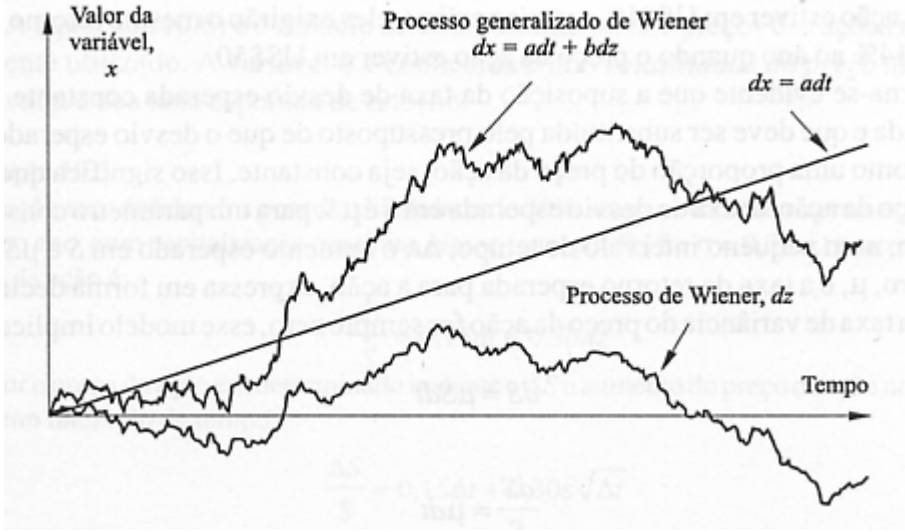
$$dx \sim N(a, b^2 dt)$$

Note que:

$$Var[dx] = b^2 dt \quad \rightarrow \quad \frac{Var[dx]}{dt} = b^2$$

A *Figura 2.7* ilustra o processo generalizado de Wiener graficamente:

Figura 2.7 – Processo generalizado de Wiener



Fonte: Hull (2003)

2.6.4. *Lema de Itô*

Outro tipo de processo estocástico que pode ser definido é o *processo de Itô*, que corresponde ao processo generalizado de Wiener no qual os parâmetros a e b são funções da variável objeto x e do tempo t, podendo ser escrito da seguinte maneira:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{2.13}$$

Note que a taxa de desvio e a taxa de variância do processo de Itô estão sujeitas a mudanças com o tempo.

Itô (1951) chegou a um importante resultado, que ficou conhecido como *Lema de Itô*. O Lema de Itô mostra que uma função $G(x,t)$, onde x é uma variável que segue o processo de Itô, segue o seguinte processo:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

onde dz é o mesmo processo de Wiener da equação (2.13). Assim, $G(x,t)$ também segue o processo de Itô, possuindo taxa de desvio de:

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$$

e taxa de variância de:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} b \right)^2$$

2.6.5. *Modelo de comportamento dos preços das ações*

Um dos aspectos principais acerca dos preços das ações remete ao fato de que o retorno percentual esperado de uma ação, exigido pelos investidores, independe de seu preço. Isso significa que se os investidores esperam que o retorno de uma ação seja de 10% ao ano, eles exigirão este mesmo retorno quer a ação esteja custando \$10, quer ela esteja custando \$50.

Para tanto, seja S o preço da ação, a taxa de desvio esperada em S é μS, onde μ é um parâmetro constante que representa a taxa de retorno esperada para a ação. Se a taxa de variância do preço da ação fosse sempre zero, esse modelo implicaria que:

$$dS = \mu S dt \quad \rightarrow \quad \frac{dS}{S} = \mu dt$$

Na prática, é óbvio que o preço de uma ação possui variabilidade. Definindo σ^2 como a taxa de variância da mudança proporcional no preço da ação e, conseqüentemente, $\sigma^2 S^2$ como a taxa de variância instantânea de *S*, é possível representar *S* por um processo de Itô que pode ser escrito como:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

ou ainda

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{2.14}$$

A equação (2.14) é a versão do modelo de comportamento dos preços das ações mais utilizada, onde μ é a taxa esperada de retorno da ação e σ é conhecida como a *volatilidade* do preço da ação. Como será visto mais adiante, o preço de uma opção segundo o modelo de B&S independe de μ. A volatilidade σ, por outro lado, irá se revelar extremamente importante neste processo. Tamanha é sua importância que maiores detalhes a seu respeito serão vastamente discutidos no capítulo 3 e no decorrer deste trabalho.

Uma última análise aqui surge da aplicação do Lema de Itô ao modelo de comportamento dos preços das ações. A partir deste lema, o processo seguido por uma função $G(S,t)$ é:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \tag{2.15}$$

Observe que *S* e *G* são afetados pela mesma fonte de incerteza subjacente *dz*, uma afirmação que é bastante importante na derivação dos resultados de B&S. Ao definir a função $G(S,t)$ como:

$$G = \ln S$$

as seguintes derivadas são obtidas:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \quad , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \quad e \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

que, substituídas na equação (2.15), resulta em:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

Essa equação indica que, como μ e σ são constantes, G segue o processo generalizado de Wiener, com taxa de desvio constante de $\mu - \sigma^2/2$ e taxa de variância constante de σ^2. Isso implica ainda que:

$$\ln S_T - \ln S \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right]$$

ou, escrito de outra forma, que:

$$\ln S_T \sim N\left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right] \qquad (2.16)$$

onde S_T é preço da ação em algum instante futuro T, S é o preço da ação no instante atual t e $N[m, s^2]$ denota uma distribuição normal com média m e variância s^2. Isso revela que $\ln S_T$ é normalmente distribuído, de modo que S_T tenha uma *distribuição lognormal*.

Algumas conclusões a respeito da volatilidade também podem ser obtidas a partir da equação (2.16). Além de ser tratada como constante ao longo do tempo, observa-se que o desvio padrão de $\ln S_T$, dado por:

$$s^2 = \sigma^2(T-t) \quad \rightarrow \quad s = \sigma\sqrt{T-t}$$

é proporcional a $\sqrt{T-t}$ tendo σ como constante de proporcionalidade, ou seja, a volatilidade pode ser entendida como a razão entre este desvio padrão e a raiz quadrada do período futuro que estiver sendo considerado.

2.6.6. Equação diferencial de Black & Scholes

Considere uma ação cujo preço S siga o modelo de comportamento dos preços das ações segundo (2.14), ou seja:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

Suponha que *f* seja o preço de uma *call* ou mesmo um outro derivativo dependente de *S*. A variável *f* deve ser alguma função de *S* e *t*. A partir de (2.15), tem-se que:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \tag{2.17}$$

As versões discretas das equações (2.14) e (2.17) são respectivamente:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \tag{2.18}$$

e

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \tag{2.19}$$

Como foi destacado na seção 2.6.5, os processos de Wiener $\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ subjacentes a *f* e *S* são iguais. Desta maneira, é desejável e possível escolher uma carteira apropriada composta pela ação e pela opção de tal forma que o processo de Wiener pode ser eliminado.

A carteira apropriada é dada por uma posição vendida em uma *call* para uma posição comprada em $\partial f / \partial S$ ações. Seja Π o valor desta carteira. A escolha conforme as suposições levantadas faz com que:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \tag{2.20}$$

A mudança $\Delta\Pi$ no valor da carteira após um pequeno intervalo de tempo Δt é dada por:

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \tag{2.21}$$

Expandindo Δf e ΔS, segundo as equações (2.18) e (2.19), em (2.21), resulta que:

$$\Delta\Pi = -\frac{\partial f}{\partial S} \mu S \Delta t - \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t - \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z + \frac{\partial f}{\partial S} \mu S \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z$$

que simplificada se reduz a:

$$\Delta\Pi = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \tag{2.22}$$

É fundamental observar que como essa equação não envolve Δz, a carteira Π não apresenta risco durante um pequeno intervalo de tempo Δt. Da mesma forma que no modelo binomial de precificação da seção 2.5, aqui deve ser feita novamente a avaliação neutra ao risco, segundo a qual a carteira deve obter, instantaneamente, a mesma taxa de retorno de qualquer outro título sem risco, que corresponde neste caso à taxa de juros básica livre de risco *r*. Segue-se que:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \tag{2.23}$$

Substituindo os resultados obtidos nas equações (2.20) e (2.22) na relação (2.23), obtém-se:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

de modo que:

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \tag{2.24}$$

A equação (2.24) é a equação diferencial de Black & Scholes. Ela possui diversas soluções correspondentes aos preços de todos os diferentes derivativos que podem ser definidos com *S* como sendo o preço do ativo base. As soluções, no entanto, dependem das condições de fronteira utilizadas, que especificam os valores do derivativo nas fronteiras dos valores possíveis de *S* e *t*.

No caso de uma *call*, a principal condição de fronteira é:

$$f = \max(S - K, 0), \text{ para } t = T$$

Em Black e Scholes (1973), a equação diferencial (2.24) foi resolvida para essa condição de contorno, chegando por fim ao preço de uma *call*, dado por:

$$C = S\Phi(x) - Kr^{-t}\Phi(x - \sigma\sqrt{t}) \tag{2.25}$$

com

$$x = \frac{\log\left(S/Kr^{-t}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

onde S é o preço atual da ação, K é o *strike* da opção, r é a taxa de juros básica, σ é a volatilidade e t é prazo até o vencimento. A função $\Phi(y)$ é a função de distribuição de probabilidade acumulada para uma variável y que segue uma distribuição normal padrão, ou simplesmente *função de distribuição normal acumulada*.

Uma interpretação para os termos da fórmula de B&S fica mais fácil se a equação (2.25) for reescrita da seguinte forma:

$$C = r^{-t}\left(S\Phi(x)r^{t} - K\Phi(x-\sigma\sqrt{t})\right)$$

Assim, a expressão $\Phi(x-\sigma\sqrt{t})$ pode ser entendida como a probabilidade de a opção ser exercida num mundo neutro ao risco, de modo que $K\Phi(x-\sigma\sqrt{t})$ seja o *strike* multiplicado pela probabilidade desse *strike* ser pago. Já a expressão $S\Phi(x)r^{t}$ representa o valor esperado de uma variável que é igual a S_T, se $S_T > K$, e zero caso contrário, num mundo neutro ao risco. Tal interpretação mostra ainda a consistência da fórmula com a avaliação neutra ao risco.

O preço de uma *put* pode ser calculado de forma semelhante, considerando a seguinte condição de fronteira:

$$f = \max\,(K - S, 0), \text{ para } t = T$$

Resolvendo a equação diferencial para essa condição chega-se à seguinte expressão para o preço de uma *put*:

$$P = Kr^{-t}\Phi(\sigma\sqrt{t} - x) - S\Phi(-x) \qquad (2.26)$$

com x definido como na expressão (2.25).

Por fim, vale uma comparação entre as equações (2.9) e (2.25), onde ambas referem-se à expressão do preço de uma *call*, sendo a primeira obtida pelo modelo binomial de precificação de Cox, Ross e Rubinstein (1979) e a segunda pelo modelo de B&S de Black e Scholes (1973). É possível demonstrar que à medida que o número de passos n do modelo binomial aumenta, sua fórmula dada pela expressão (2.9) converge para a fórmula de B&S

obtida em (2.25), uma conclusão importante que valida ainda mais a coerência dos dois estudos.

2.6.7. Críticas ao modelo

Desde que foi publicado em Black e Scholes (1973), o modelo de B&S vem sendo incansavelmente analisado, criticado, adaptado e discutido por profissionais do mercado e estudiosos. Deve ter ficado evidente ao longo de sua dedução que uma série de suposições e aproximações foram feitas, aderindo ao modelo várias imperfeições.

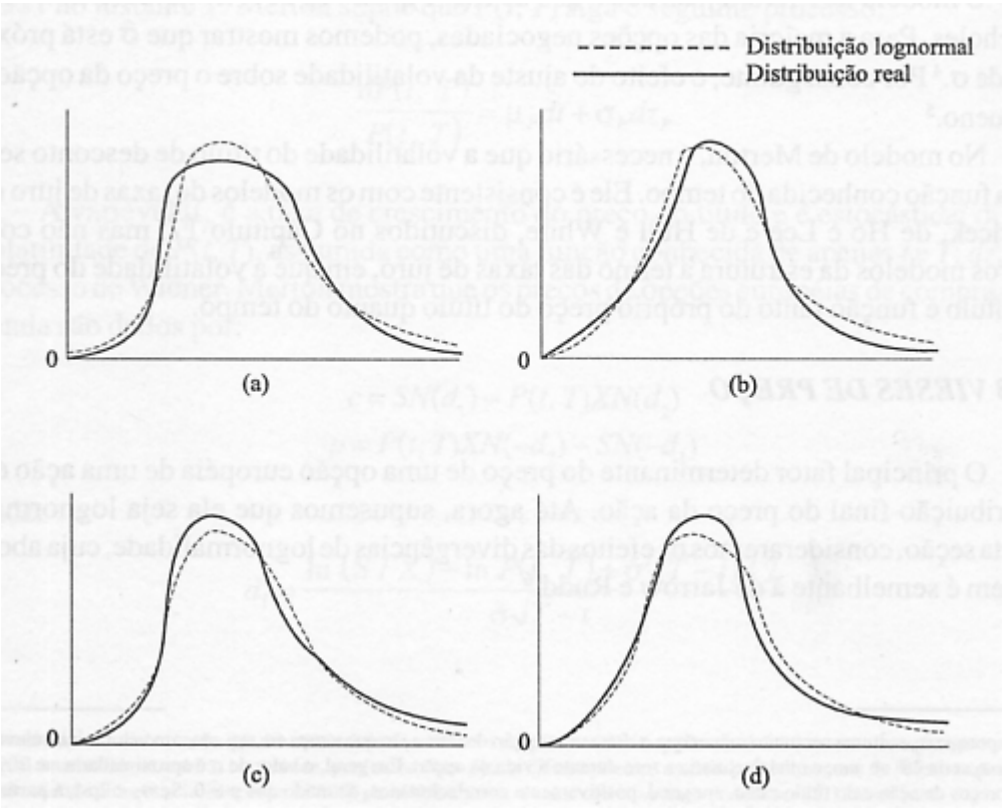
De fato, algumas destas premissas não apresentam um impacto tão significativo quando confrontadas com a realidade. Este é o caso, por exemplo, de suposições como a ausência de custos de transação, igualdade de tributação ou mesmo a não existência de riscos de liquidez ou de crédito. Em algumas situações o impacto relativo torna-se desprezível, enquanto em outros os participantes acabam encontrando maneiras de contornar o problema.

Outras suposições, no entanto, não desfrutam da mesma sorte. Talvez uma das mais criticadas premissas de B&S seja a de que o modelo assume que a distribuição de probabilidades do preço do ativo em algum instante no futuro, condicionado pelo seu valor atual, é lognormal. É natural pensar que cada ativo possui sua distribuição de retornos própria, podendo esta se aproximar ou não a uma lognormal.

Estudos realizados, como frisado em Hull (1997) e Natenberg (1994), freqüentemente mostram que opções *in the money* e *out of the money* apresentam desvios em sua precificação relativamente às opções *at the money*. Estes erros de precificação podem em geral ser explicados pelas diferenças entre a distribuição lognormal assumida por B&S e a distribuição verdadeira.

A *Figura 2.8* mostra quatro possíveis comparações nas quais a real distribuição do preço do ativo pode ser diferente de uma lognormal, ainda que ambas possuam a mesma média e o mesmo desvio padrão. Na *Figura 2.8(a)* ambas as caudas são mais leves que as da distribuição lognormal, na *Figura 2.8(d)* ambas são mais pesadas e nas *Figuras 2.8(b)* e *2.8(c)* uma é mais leve e outra é mais pesada.

Figura 2.8 – Distribuições alternativas do preço final do ativo



Fonte: Hull (2003)

Os vieses de precificação promovidos por tais diferenças estão resumidos na *Tabela 2.2*. A análise destes efeitos segue em geral a mesma lógica de raciocínio. Por exemplo, considere uma *call* que seja significativamente *out of the money*. Isso significa que seu valor será positivo apenas se houver um grande aumento no preço do ativo. Seu valor depende, portanto, somente da cauda direita da distribuição do preço final do ativo. Em conseqüência, B&S tenderá a estabelecer um preço inferior para uma *call* que esteja *out of the money* nas situações *(c)* e *(d)* da *Figura 2.8* e um preço superior nas situações *(a)* e *(b)* da *Figura 2.8*.

Outros vieses significativos do modelo de B&S surgem em decorrência de o mesmo tratar a volatilidade do preço de um ativo como constante ao longo da vida da opção. Além disso, ele considera a volatilidade constante inclusive para os diferentes *strikes* possíveis para a opção à qual o ativo está atrelado. Na prática, nenhuma destas premissas está sequer próxima de ser verdade. Mais detalhes sobre os vieses decorrentes da volatilidade serão discutidos no capítulo seguinte.

Deve estar claro pelos argumentos levantados até aqui que o modelo de B&S está longe de reproduzir com perfeição a realidade. Porém bem menos claro devem estar os motivos que

ainda assim fazem de um modelo tão criticado uma ferramenta tão popular, ou mais ainda, as razões pelas quais o mesmo ainda não foi substituído.

Tabela 2.2 – Vieses correspondentes às distribuições alternativas da *Figura 2.8*

Primeiro caso: B&S estabele preços superiores		
	Call	*Put*
In the money	(a) e (c)	(a) e (b)
Out of the money	(a) e (b)	(a) e (c)

Segundo caso: B&S estabelece preços inferiores		
	Call	*Put*
In the money	(b) e (d)	(c) e (d)
Out of the money	(c) e (d)	(b) e (d)

Fonte: Autor

A verdade é que há um consenso de que, apesar de claramente não ser perfeito, o modelo de B&S provou ser melhor que qualquer outra ferramenta ou método para avaliar opções. Aqui há um cuidado com relação ao uso do termo "melhor". Existem sim diversos outros modelos que providenciam resultados mais acurados, porém envolvem uma série de variáveis não observáveis e revelam-se extremamente complicados de serem utilizados. Em contrapartida, modelos de aplicação mais fácil não apresentaram resultados que possam ser considerados aceitáveis. O modelo de B&S ainda hoje é o que melhor pondera essa relação acurácia *versus* simplicidade. Outra razão para sua popularidade vem do fato de que, pelo seu pioneirismo, suas imperfeições já foram tão estudadas que os profissionais do mercado acabaram desenvolvendo alguns artifícios para lidar com elas. Tais artifícios serão detalhados também no capítulo seguinte.

3. VOLATILIDADE

O que é volatilidade? E por que ela é tão importante para quem negocia opções? Este capítulo busca responder a estas perguntas e ir mais além, levantando aspectos teóricos e práticos importantes que visam familiarizar o leitor com este parâmetro, que será a variável básica a ser tratada por toda a análise a ser desenvolvida no decorrer deste trabalho.

É conteúdo deste capítulo, portanto, desde a definição da volatilidade propriamente dita até suas classificações, seu cálculo e de que forma é negociada no mercado. Sua relação com a precificação de opções também é posta em pauta, em especial com o modelo de B&S, e como ela é lidada na prática pelos profissionais do mercado.

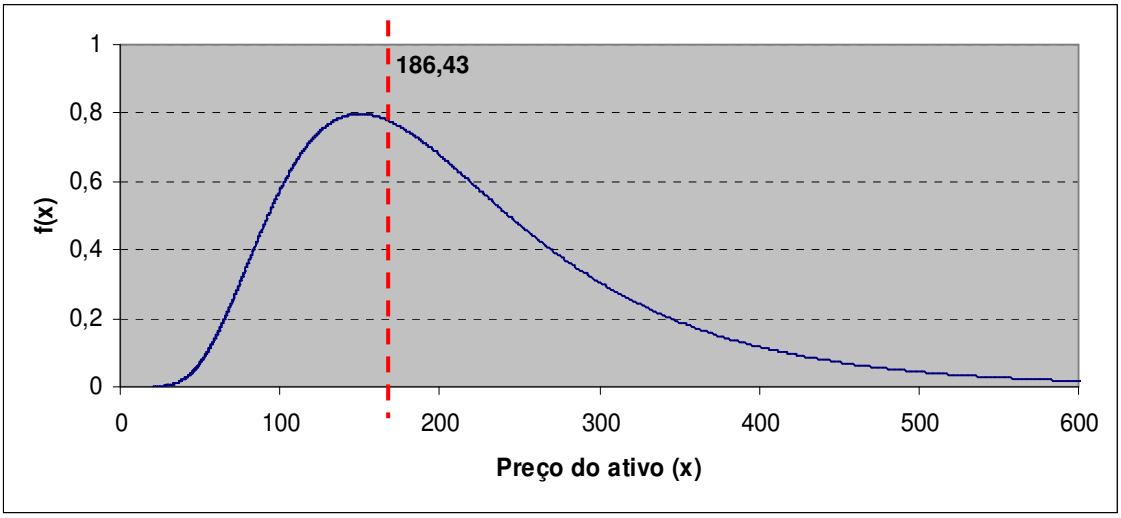
3.1. Definição

O negociador de opções, assim como o negociador de ativos básicos, está interessado na direção em que se move o mercado. Porém, ao contrário deste último, quem negocia opções está também especialmente interessado na velocidade com que o mercado realiza tal movimentação. Essa preocupação ocorre porque se o preço de um dado ativo não oscilar numa velocidade suficiente, opções baseadas neste ativo perderão seu valor, já que se torna muito mais improvável o mercado atingir seus respectivos preços de exercício.

A volatilidade é de certa forma uma medida da velocidade com que se move o mercado. Mercados que se movem de forma lenta são ditos mercados de baixa volatilidade, ao passo que mercados que se movimentam rapidamente são chamados de mercados de alta volatilidade.

Mais especificamente, a volatilidade pode ser entendida como uma medida de dispersão do preço ao redor de seu valor esperado, o S_T da equação (2.16). Para entender melhor este conceito, considere um exemplo genérico no qual o preço de um ativo obedeça ao modelo de comportamento dos preços das ações desenvolvido na seção 2.6.5 e que sua distribuição de probabilidades daqui a um ano seja dada conforme o gráfico da *Figura 3.1*:

Figura 3.1 – Distribuição do preço de um ativo – exemplo genérico



Fonte: Autor

O preço deste ativo nunca pode ser menor que zero e pode em teoria atingir qualquer preço ao fim de um ano (dadas as condições do mercado), sendo que espera-se estatisticamente que seu valor seja 186,34.

A altura e a largura da curva de distribuição são funções do nível de volatilidade assumido no mercado. Se a volatilidade aumentasse, a amplitude de possíveis valores para o preço desse ativo também aumentaria, ou seja, a largura do gráfico aumentaria. Da mesma forma, esse eventual aumento de volatilidade faria com que a probabilidade do preço final ser próximo da média 186,34 diminuísse, diminuindo assim a altura do gráfico (que representa o valor da sua função densidade de probabibilidade).

Seria intuitivo pensar na volatilidade estatisticamente como o desvio padrão do preço do ativo. Com um certo cuidado, esse pensamento não está incorreto. Como definido em Natenberg (1994): *"Podemos definir o valor da volatilidade associada a um instrumento de referência como a mudança em seu preço correspondente a um desvio padrão, em termos percentuais, ao fim do período de um ano"*.

Se considerado o período de um ano, a volatilidade é exatamente o desvio padrão do preço do ativo neste período. Um exemplo seria dizer que a volatilidade de uma ação é de 25% ao ano. Para especificar a volatilidade em qualquer base de tempo, basta observar que na equação (2.16) o desvio padrão do logaritmo do retorno é a volatilidade multiplicada pela raiz quadrada do tempo entre as observações. Desta forma, é possível calcular a volatilidade através de:

$$\sigma = DP/\sqrt{\tau} \tag{3.1}$$

onde *DP* é o desvio padrão do logaritmo do retorno e τ é o intervalo de tempo em anos correspondente ao retorno calculado.

Trazendo a análise para o mundo das opções, quanto mais volátil for o preço de um ativo, maior será a chance do VI de uma opção deste ativo atingir um valor positivo, seja ela uma *call* ou uma *put*. Sendo assim, a volatilidade considerada na precificação de uma opção corresponde à volatilidade esperada à qual o preço do ativo objeto estará sujeito ao longo da vida desta opção.

3.2. Classificação

A literatura traz diversas classificações para a volatilidade, porém discorrer sobre cada uma aqui foge do escopo deste trabalho. Serão detalhadas apenas as principais e que são de fato utilizadas na prática: a *volatilidade histórica* e a *volatilidade implícita*. Maiores detalhes acerca das demais classificações da volatilidade podem ser encontrados em Natenberg (1994).

3.2.1. Volatilidade histórica

A volatilidade histórica, como o próprio nome diz, é obtida a partir de dados históricos acerca do preço do ativo em questão. Sua medida é em geral estimada empiricamente, observando-se o preço do ativo em intervalos fixos de tempo. Estes intervalos podem ser, por exemplo, semanais, mensais ou até mesmo correspondentes a uma hora de pregão. No entanto, é mais comum considerar observações diárias, onde os retornos são calculados a partir do preço de fechamento do ativo a cada dia.

Sejam:

- $\boldsymbol{n + 1}$: número de observações;
- $\boldsymbol{S_i}$: preço do ativo ao final do *i*-ésimo intervalo ($i = 0, 1, ..., n$);
- $\boldsymbol{u_i}$: retorno, continuamente capitalizado (não-anualizado), no *i*-ésimo intervalo;
- $\boldsymbol{\tau}$: intervalo de tempo em anos.

Pela definição de retorno continuamente capitalizado, tem-se que:

$$S_i = S_{i-1} e^{u_i}$$

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \tag{3.2}$$

Já o desvio padrão dos valores de u_i pode ser estimado pela fórmula usual:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$$

ou

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2} \tag{3.3}$$

onde $\bar{u}$ é a estimativa da média dos valores de u_i.

Desta maneira, utilizando a estimativa para o desvio padrão encontrada através da equação (3.3), pela equação (3.1) é possível estimar a própria volatilidade histórica, designada aqui por s^*:

$$s^* = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

É importante salientar que esta estimativa da volatilidade refere-se a dados do passado e que utilizar a volatilidade histórica para precificar opções seria equivalente a assumir que o passado irá se repetir.

No entanto, a volatilidade histórica torna-se bastante útil para entender num horizonte de longo prazo como o preço do ativo se comporta, permitindo analisar se um cenário está acima ou abaixo da volatilidade média histórica ou definir regiões de volatilidade baixa, média e alta para um dado ativo. Pode-se afirmar que a volatilidade histórica consiste numa importante ferramenta de auxílio na tomada de decisão.

3.2.2. Volatilidade implícita

Este tipo específico de volatilidade está diretamente associado às opções, ao contrário da volatilidade histórica que é deduzida a partir do preço do próprio ativo básico.

Ao precificar uma opção utilizando o modelo de B&S, o único parâmetro que não é prontamente observável é exatamente a volatilidade do preço do ativo, já que esta no modelo teórico refere-se à volatilidade que será observada ao longo da vida desta opção, que nem sequer ainda começou.

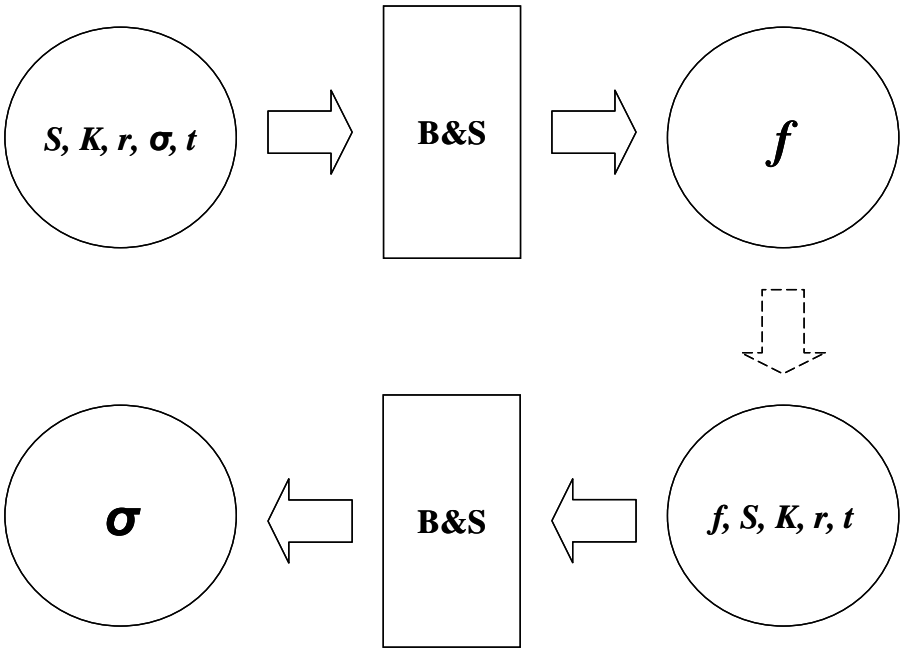
Os profissionais do mercado deverão, portanto, imputar sua própria percepção acerca da volatilidade ao precificar uma opção. Como as opções são ativamente negociadas por diversos participantes, é possível derivar a partir dos preços das opções praticados no mercado qual a volatilidade que está sendo implicitamente aceita por esses participantes. Esta volatilidade é conhecida como volatilidade implícita.

Como foi visto no capítulo 2, o modelo de precificação de B&S é de longe o mais utilizado para precificar opções. Para obter o prêmio de uma opção, o modelo requer a entrada de vários parâmetros, dentre os quais a volatilidade. Entretanto, ao tomar um preço de opção cotado no mercado, é possível reverter o processo e obter a volatilidade implícita ao imputar no modelo o preço da opção juntamente com os demais parâmetros. A idéia está ilustrada na *Figura 3.2*.

Note que não é possível inverter as equações (2.25) e (2.26) para que σ seja expresso como uma função de S, K, r, t e f (aqui representando o preço da opção, seja uma *call* ou uma *put*). Porém, um procedimento básico de tentativa e erro ou uma ferramenta de atingir meta podem ser utilizados para encontrar o valor de σ implícito.

Um comentário relevante sobre volatilidades implícitas diz respeito ao fato de que é comum no mercado de opções a negociação direta da volatilidade em detrimento do preço da opção propriamente dito. Como cada volatilidade está associada a um único prêmio da opção, é equivalente referir-se a ela ou ao preço da opção calculado com base nela própria.

Figura 3.2 – Obtenção da volatilidade implícita



Fonte: Autor

3.3. A superfície de volatilidade

Como foi discutido na seção 2.6.7, o modelo de B&S apresenta uma série de imperfeições. Foi levantado que uma delas consiste no fato de o modelo considerar a volatilidade como uma constante, o que não é verdade.

Para evidenciar este fato, é instrutivo tomar como exemplo as opções de ações. No mercado acionário, a correlação entre a volatilidade e o preço das ações é em geral negativa, ou seja, aumentos de preço implicam em diminuição da volatilidade e vice-versa. Isto se deve em partes ao aumento da alavancagem da empresa quando o valor de suas ações sofre uma queda, fazendo com que aumente o risco para o detentor dessas ações e, em conseqüência, agregue maior volatilidade à negociação das mesmas.

Maior volatilidade implica em maior probabilidade de um determinado preço ser atingido, no caso das ações preços muito mais baixos são de certa forma mais prováveis do que preços muito mais altos. Isso é equivalente à situação *(b)* da *Figura 2.8* e decorre nos vieses de precificação associados a esta situação.

A discussão anterior traz um argumento que vai de encontro à premissa do modelo de B&S de que a volatilidade é constante. Na tentativa de corrigir os vieses decorrentes desta suposição

errônea do modelo, os negociadores de opções consideram diferentes volatilidades implícitas ao variar o *strike* e o prazo até o vencimento, obtendo assim uma superfície de volatilidade implícita nestes dois eixos. Nas subseções seguintes a relação da volatilidade com cada eixo será melhor detalhada.

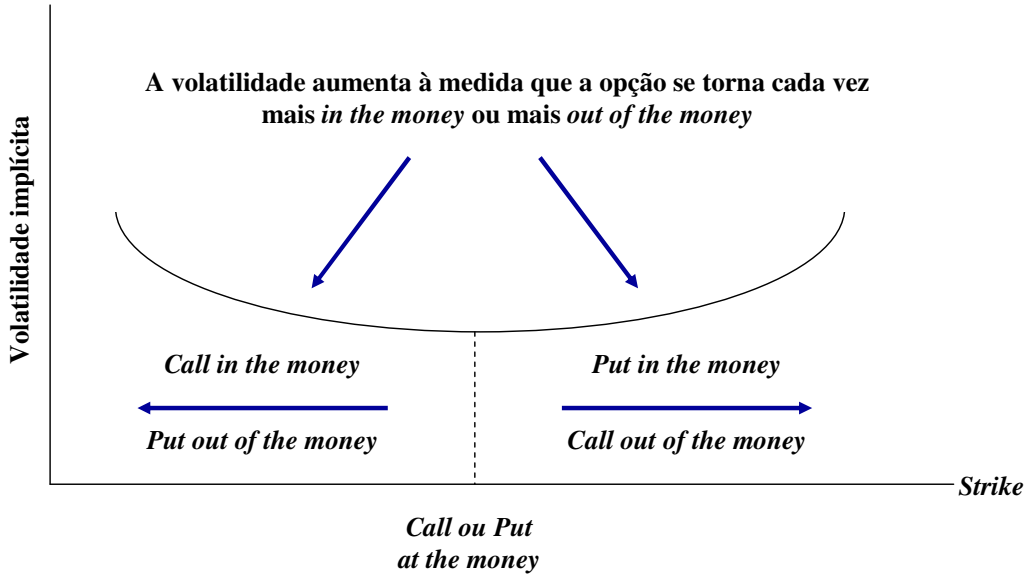
3.3.1. Smile

A curva que mede a relação da volatilidade implícita observada com o *strike* da opção é comumente chamada de curva *smile da volatilidade*, em função de algumas destas curvas apresentarem um formato característico que lembra um sorriso.

Este formato de sorriso é mais recorrente em opções de taxa de câmbio, onde opções *in the money* e *out of the money* tendem a ter volatilidades implícitas mais altas do que opções *at the money*. Isso ocorre porque movimentos extremos nas taxas de câmbio são mais prováveis do que o modelo lognormal de B&S em geral prevê, já que este tipo de opção é inclusive buscado como uma forma de proteção a uma forte valorização ou desvalorização da moeda em questão. O *smile* da volatilidade para estas opções está representado na *Figura 3.3*.

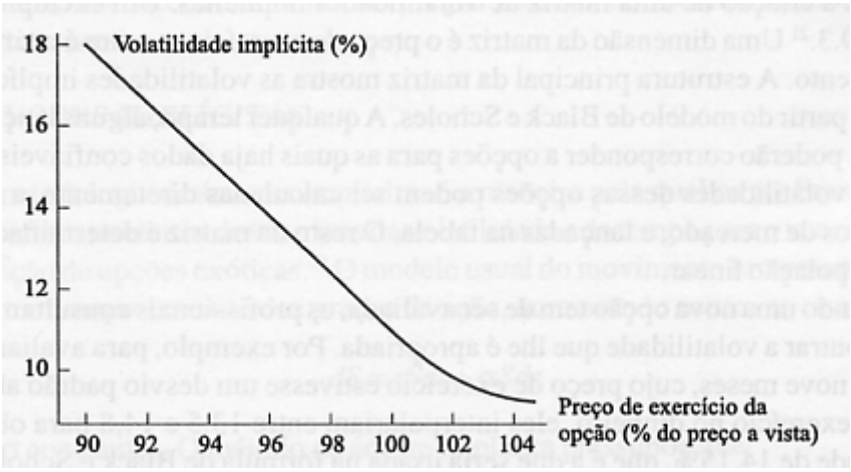
O *smile* da volatilidade para outros tipos de opções pode às vezes se distanciar um pouco deste formato de sorriso, como é o caso da situação exposta anteriormente com as opções de ações. Para estas opções e para opções de índices de ações, a volatilidade é maior para *strikes* mais baixos do que para *strikes* mais altos. A *Figura 3.4* mostra o *smile* da volatilidade para opções do índice S&P 500 em 5 de maio de 1993, obtido em Hull (1997).

Figura 3.3 – *Smile* da volatilidade para opções de taxa de câmbio



Fonte: Autor

Figura 3.4 – *Smile* da volatilidade para opções do S&P 500 em 13/05/1993



Fonte: Hull (1997)

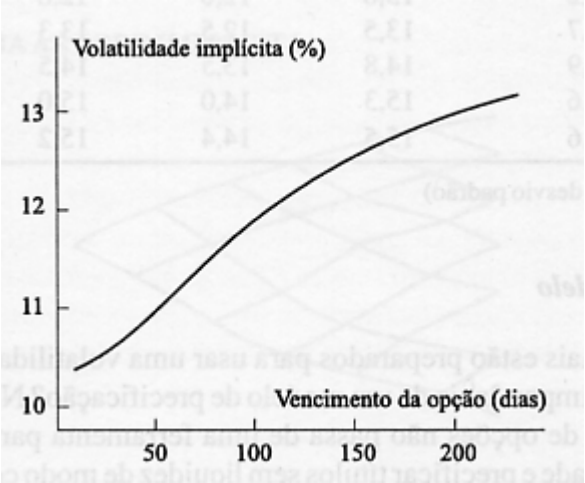
3.3.2. Estrutura a Termo

Também é comum o cálculo da chamada *estrutura a termo da volatilidade*, que corresponde ao gráfico da volatilidade implícita em função do prazo para o vencimento da opção.

Da mesma forma que o desvio padrão da distribuição do preço de um ativo aumenta à medida que se avança no tempo, também aumentam as distorções nesta distribuição causadas por incertezas acerca da volatilidade. Em função disso, a volatilidade implícita é em geral uma

função crescente do tempo. A *Figura 3.5* traz a estrutura a termo da volatilidade para opções do índice S&P 500 em 5 de maio de 1993, também obtido em Hull (1997).

Figura 3.5 – Estrutura a termo da volatilidade para opções do S&P 500 em 13/05/1993



Fonte: Hull (1997)

3.3.3. Matriz de Volatilidade

A volatilidade implícita é, portanto, calculada em função do *strike* e do prazo para o vencimento de uma dada opção. Graficamente, isso é equivalente a dizer que a volatilidade deve ser tratada como uma superfície apoiada neste par de eixos. A *Figura 3.6* traz um exemplo de uma superfície de volatilidade implícita plotada em função do número de dias para o vencimento (DTM) e do *strike* na forma do delta da opção.

É uma prática comum referir-se ao *strike* de uma opção em relação ao seu delta. O delta de uma opção pode ser entendido como a taxa de variação de seu preço em relação ao preço do ativo objeto. Formalmente, é definido por:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

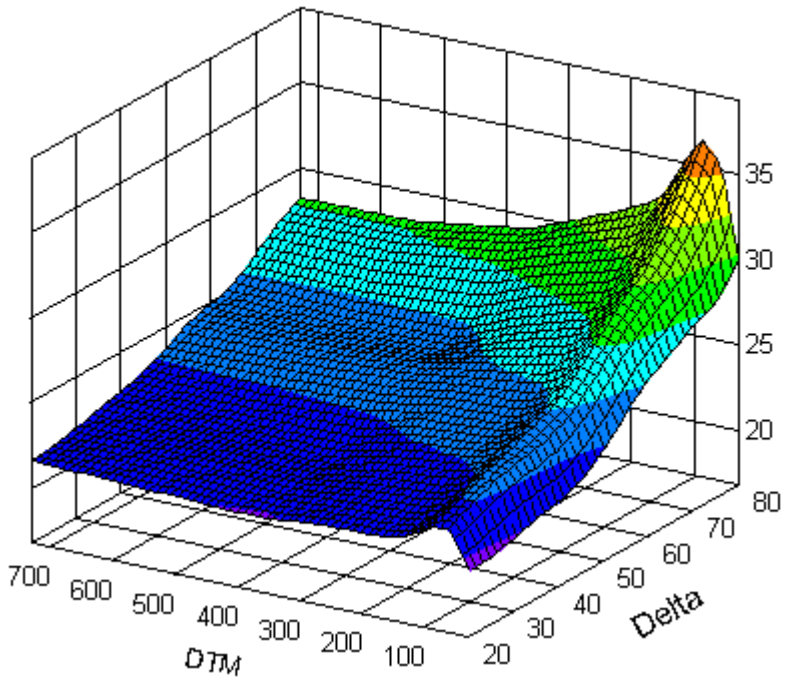
onde *f* é o preço da opção e *S* o preço corrente do ativo objeto. Uma *call* que esteja bastante *out of the money* praticamente não terá seu preço alterado para um pequeno aumento no preço do ativo base. Isso é equivalente a afirmar que seu delta é próximo de zero. Já ao considerar uma *call* bastante *in the money*, o efeito observado é o oposto, onde uma aumento no preço do ativo implica em um aumento quase da mesma dimensão no preço da opção. Trata-se, portanto, de uma opção com delta próximo de 1. Para uma *put* o delta é negativo, ou seja, o

prêmio da opção decresce à medida que o preço do ativo aumenta. Além disso, há uma paridade entre *puts* e *calls*, onde para um mesmo *strike* tem-se que:

$$\Delta_{call} + \left|\Delta_{put}\right| = 1$$

Opções *at the money* apresentam delta, em módulo, próximo de 0,5. A forma mais comum de indicar o *strike* de uma opção através do delta é informá-lo multiplicado por 100 e acompanhado da letra "D", sempre dizendo se o mesmo refere-se a uma *call* ou uma *put*. Por exemplo, um *strike* 40D CALL é equivalente ao *strike* de uma opção do tipo *call* que possua 40% de delta.

Figura 3.6 – Exemplo de uma superfície de volatilidade implícita



Fonte: Wikipedia

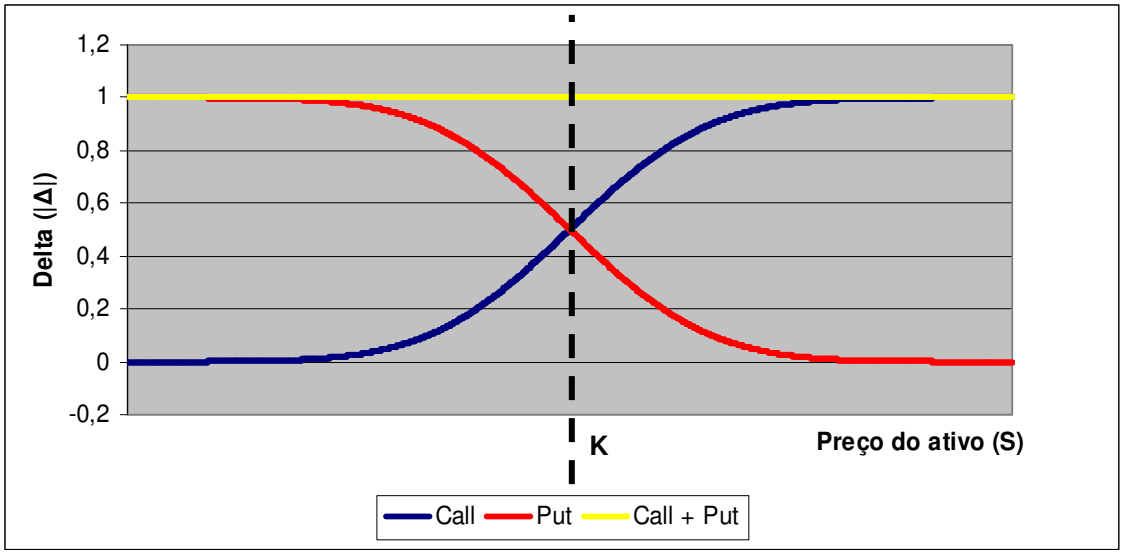
A *Tabela 3.1* e a *Figura 3.7* resumem as relações do delta com o *strike* da opção:

Tabela 3.1 – Relação do delta com o valor da opção

Valor da opção	***Call***	***Put***
Bastante *in the money*	$\Delta \rightarrow +1$	$\Delta \rightarrow -1$
At the money	$\Delta = 0{,}5$	$\Delta = -0{,}5$
Bastante *out of the money*	$\Delta \rightarrow 0$	$\Delta \rightarrow 0$

Fonte: Autor

Figura 3.7 – Gráfico do delta em função do VI da opção



Fonte: Autor

De volta à análise da superfície de volatilidade implícita, uma prática mais recorrente é tratá-la na forma de uma *matriz de volatilidades implícitas*. Novamente, uma dimensão da matriz é o *strike* da opção, a outra é o prazo para o seu vencimento e seus elementos correspondem às volatilidades implícitas calculadas através do método de B&S. Um exemplo genérico é mostrado na *Tabela 3.2*.

Tabela 3.2 – Matriz de volatilidades implícitas – exemplo genérico

	10D Call (90D Put)	**25D Call (75D Put)**	**ATM 50D**	**25D Put (75D Call)**	**10D Put (90D Call)**
1 mês	14,2	13,0	12,0	12,8	13,6
3 meses	14,2	13,0	12,0	12,8	13,6
6 meses	14,7	13,5	12,5	13,3	14,1
1 ano	15,9	14,8	13,5	14,5	15,5
2 anos	16,6	15,3	14,0	15,0	16,0
5 anos	16,6	15,5	14,4	15,2	16,0

Fonte: Autor

As volatilidades implícitas que aparecem na matriz são em geral calculadas diretamente a partir do preço de mercado da opção correspondente. Quando não há dados de mercado para este cálculo ou para volatilidades que não estão definidas na matriz, estes valores são, por um consenso de mercado, determinados mediante interpolação linear. Por exemplo, caso fosse desejável determinar a volatilidade de uma opção *at the money* (ATM) que vence em 9 meses usando a matriz da *Tabela 3.2*, bastaria interpolar 12,5 com 13,5 para encontrar uma volatilidade de 13,0%.

4. ARGUMENTAÇÃO TEÓRICA

A próxima etapa do trabalho consiste em desenvolver o embasamento teórico necessário para a resolução do problema proposto. Trata-se basicamente de um problema de cunho estatístico, cuja solução foi buscada nos alicerces da estatística bayesiana, uma escola cujos princípios e procedimentos baseiam-se nos estudos do matemático britânico Thomas Bayes (1702-1761).

É conteúdo deste capítulo apresentar em caráter introdutório a abordagem bayesiana e o detalhamento das ferramentas que serão utilizadas na construção do modelo. Para tanto, serão introduzidos os conceitos do Teorema de Bayes, a figura do especialista, as distribuições *a priori* e *a posteriori*, a função de verossimilhança, além dos estimadores bayesianos utilizados, especificamente a esperança *a posteriori* (estimação pontual) e o intervalo de credibilidade (estimação por regiões).

4.1. Teorema de Bayes

Trata-se de um dos teoremas básicos da estatística, que traz o conceito de probabilidade condicional. Seu entendimento é fundamental para compreender o paradigma que governa a escola bayesiana.

Considere n eventos A_i mutuamente excludentes e exaustivos, tais que:

$$A_1, A_2, ..., A_n; P(A_i) > 0; A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

Considere também um evento B qualquer, $P(B) > 0$. É fácil verificar a decomposição de B na união dos conjuntos A_i:

$$B = \cup_i (A_i \cap B)$$

Em termos de probabilidade, isso é o mesmo que dizer:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \tag{4.1}$$

Da definição de probabilidade condicional, pode-se escrever:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i \mid B)P(B) = P(B \mid A_i)P(A_i) \tag{4.2}$$

De posse dos resultados obtidos em (4.1) e (4.2), chega-se ao Teorema de Bayes propriamente dito:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)} \tag{4.3}$$

Uma interpretação importante deste teorema consiste em considerar os eventos A_i como "antecedentes", "causas", "hipóteses" ou "estados" a que o investigador atribui graus de credibilidade ou probabilidades *a priori* $P(A_i)$ de natureza subjetiva. Depois da informação adicional de que o acontecimento B se realizou (o acontecimento B pode ser a observação de uma amostra de dados), o investigador revê suas probabilidades *a priori* através da fórmula de Bayes e passa a atribuir aos eventos A_i as probabilidades *a posteriori* $P(A_i \mid B)$.

O Teorema de Bayes é um dos poucos resultados matemáticos que se propõe a caracterizar a aprendizagem com a experiência, isto é, a modificação da atitude inicial em relação aos "antecedentes", "causas", "hipóteses" ou "estados" depois de conhecer os dados da experiência ou da observação.

4.2. Metodologia Bayesiana

Compreendido o Teorema de Bayes, parte-se para a caracterização do que pode se chamar de metodologia bayesiana, que em certo sentido não deixa de ser uma extensão do modelo estatístico clássico, passível de uma ou outra modificação.

Normalmente um investigador se confronta com a seguinte situação: há um processo ou um sistema físico de interesse que se deseja analisar. Tal análise é conduzida através de uma experiência feita a partir da coleta de dados de uma variável aleatória X. Em geral é conveniente propor um modelo estatístico capaz de descrever este processo e sua variabilidade. O modelo é descrito através de uma distribuição de probabilidade, representada por uma função de probabilidade no caso discreto ou por uma função densidade de probabilidade no caso contínuo. Tal função costuma ser indexada por um parâmetro θ com domínio num espaço-parâmetro Θ. Desta forma, o modelo estatístico pode ser escrito assim:

$$F = \{ f(x \mid \theta) : \theta \in \Theta \}, \, x \in X$$

No modelo clássico, o parâmetro θ é um escalar ou vetor desconhecido, mas fixo, e igual ao valor particular que indexa a distribuição de probabilidade em questão. No modelo bayesiano, o parâmetro θ é tomado como um escalar ou vetor aleatório, não observável. Isso porque, para os bayesianos, aquilo que é desconhecido é incerto e toda incerteza deve ser quantificada em termos de probabilidade.

Ainda nesta linha de pensamento, os bayesianos defendem que deve ser considerada na análise uma informação inicial ou *a priori*, anterior ou externa em relação à experiência, mas demasiadamente importante para ser ignorada. Esta informação *a priori* pode ser formalmente traduzida em termos de uma distribuição de probabilidade, geralmente subjetiva, para θ. É comum usar a notação $h(\theta)$ para designar esta que será denominada a distribuição *a priori* do problema.

A informação *a priori* que se pretende incorporar na análise é a informação apriorística possuída por alguém, que se identifica como o *especialista* do problema concreto. O especialista pode ser um estatístico, um perito, o próprio investigador ou outrem. Sua informação é carregada de elementos subjetivos que, em geral, são até dominantes. Estes elementos são muitas vezes radicados em fontes objetivas (dados históricos do problema ou de fatos e problemas análogos), sem, no entanto, impedir que o especialista se envolva em processos de elaboração mental que o conduza à formação de suas crenças, agregando o caráter subjetivo à sua informação.

Suponha então que da experiência realizada para o processo analisado se observa $X = x$. Considerando que o modelo estatístico atribuído a este processo seja representado pela função $f(x|\theta)$ e a distribuição *a priori* para o parâmetro θ seja dada por $h(\theta)$, o Teorema de Bayes obtido na equação (4.3), adaptado para densidades, conduz à relação:

$$h(\theta \mid x) = \frac{f(x \mid \theta) h(\theta)}{\int_{\Theta} f(x \mid \theta) h(\theta) d\theta}, \; \theta \in \Theta \tag{4.4}$$

onde $h(\theta|x)$ é a distribuição *a posteriori* de θ depois de saber que saiu $X = x$.

Uma interpretação para este resultado seria que a atitude inicial do investigador, dada pela informação do especialista e caracterizada por $h(\theta)$, é modificada quando levada em conta a informação contida no dado x, passando a nova atitude a ser traduzida por $h(\theta|x)$.

Ao observar da experiência uma amostra casual $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, a expressão (4.4) é adaptada da seguinte forma:

$$h(\theta \mid x) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) h(\theta)}{\int_{\Theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) h(\theta) d\theta}, \ \theta \in \Theta \tag{4.5}$$

O denominador de (4.5),

$$p(x) = \int_{\Theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) h(\theta) d\theta$$

é a distribuição marginal ou preditiva da variável aleatória X e diz respeito à observação de X qualquer que seja θ. Como $p(x)$ independe de θ, é comum escrever (4.5) como:

$$h(\theta \mid x) \propto \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) h(\theta), \ \theta \in \Theta \tag{4.6}$$

Outro conceito importante é o da função de verossimilhança. Considere a variável aleatória X cuja função de probabilidade (ou função densidade de probabilidade no caso contínuo) é dada por $f(x|\theta)$. Dada uma amostra casual $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, a função de verossimilhança é definida como:

$$L(x \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta), \ \theta \in \Theta \tag{4.7}$$

Para cada $\theta \in \Theta$, $L(x|\theta)$ exprime a verossimilhança ou plausibilidade que lhe é atribuída quando se observa a amostra $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

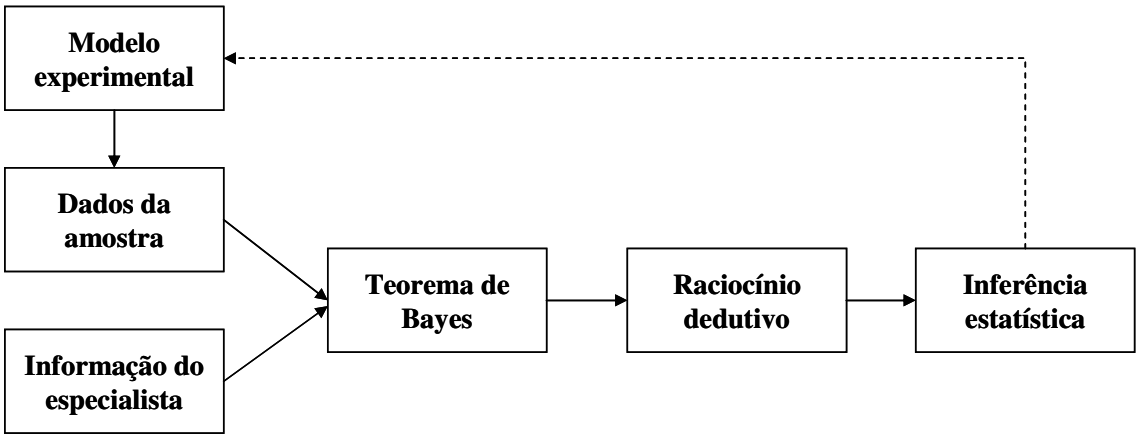
Retomando a expressão (4.6), o fator $\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$ identifica-se com a função de verossimilhança. Assim, é possível reescrevê-la da seguinte forma:

$$h(\theta \mid x) \propto L(x \mid \theta) h(\theta)\,,\ \theta \in \Theta \tag{4.8}$$

Como pode ser observado, ela tem um papel extremamente importante na fórmula de Bayes, pois representa o meio através do qual os dados *x* transformam o conhecimento *a priori* sobre θ. Paulino, Turkman e Murteira (2003) traz uma interessante interpretação da função de verossimilhança: *"a verossimilhança pode interpretar-se como expressão da informação sobre o parâmetro θ fornecida pelos dados x"*.

Um resumo da metodologia bayesiana pode ser representado como no esquema da *Figura 4.1*.

Figura 4.1 – Metodologia Bayesiana



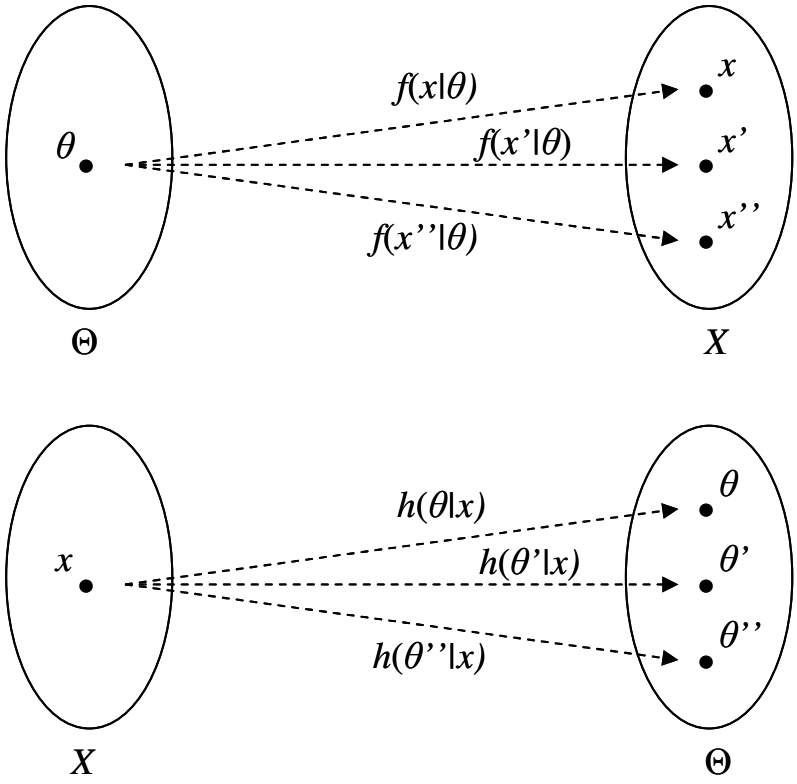
Fonte: Autor, adaptado de Paulino, Turkman e Murteira (2003)

4.3. Inferência Bayesiana

Sem dúvida, o grande objetivo final dos procedimentos bayesianos consiste em prover ao investigador uma base ferramental que torne possível a realização de inferências sobre o parâmetro não observável θ. Até aí, não há aparente diferença entre o os objetivos da estatística clássica e da bayesiana. O conflito está exatamente na implementação deste objetivo.

As inferências clássicas são baseadas em probabilidades associadas com as diferentes amostras *x* que poderiam ocorrer para algum valor fixo, mas desconhecido, do parâmetro θ. Já as inferências bayesianas são baseadas em probabilidades subjetivas ou credibilidades *a posteriori* associadas com diferentes valores do parâmetro θ e condicionadas pelo particular valor de *x* observado. O ponto *x* está fixo e é a variação de θ que é considerada. As diferenças entre as duas abordagens estão representadas no esquema da *Figura 4.2*.

Figura 4.2 – Diferença entre as inferências clássica (parte superior) e bayesiana (parte inferior)



Fonte: Autor, adaptado de Paulino, Turkman e Murteira (2003)

Outro diferencial da inferência bayesiana é que esta não foge em nenhum momento do cálculo de probabilidades. Isto porque para os bayesianos há um único estimador que é precisamente a distribuição *a posteriori* $h(\theta|x)$. Pode-se, é claro, descrever esta distribuição através da média, da mediana ou da variância, mas a distribuição em si já é suficiente para descrever θ.

Desta forma, é possível emitir enunciados probabilísticos acerca dos parâmetros, já que na abordagem bayesiana os mesmos são tratados como variáveis aleatórias. Ao invés de, por exemplo, rejeitar uma dada hipótese a um certo nível de significância, os bayesianos podem simplesmente calcular qual a probabilidade desta hipótese ser verdadeira ou falsa.

Há um conteúdo bem vasto na literatura sobre inferência bayesiana, porém para não fugir do foco deste trabalho, nas seções 4.3.1 e 4.3.2 serão detalhados apenas os estimadores que serão utilizados na solução do problema proposto: um estimador pontual, no caso a esperança *a posteriori*, e um estimador por regiões, no caso o intervalo de credibilidade. Maiores detalhes sobre estimadores bayesianos podem ser encontrados em Paulino, Turkman e Murteira (2003).

4.3.1. Esperança a posteriori

A esperança ou média *a posteriori* representa uma das formas mais usuais da estimação bayesiana pontual, que consiste em tomar como estimativas pontos típicos da distribuição *a posteriori*. A estimação por pontos pode ser entendida também como a determinação de uma medida de localização da distribuição *a posteriori*.

A definição propriamente dita da esperança *a posteriori* é dada por:

$$\hat{\theta} = E[\theta \mid x] = \int_{\Theta} \theta \, h(\theta \mid x) d\theta \,, \; \theta \in \Theta \tag{4.9}$$

4.3.2. Intervalo de credibilidade

Um resumo talvez mais informativo de $h(\theta|x)$ do que qualquer estimativa pontual pode ser obtido através de um intervalo de Θ que contenha uma parte substancial de massa probabilística *a posteriori*. Os intervalos de credibilidade (IC) são o paralelo bayesiano dos intervalos de confiança, com a diferença de que qualquer intervalo de credibilidade é definido numericamente, ou seja, não é aleatório e admite uma interpretação probabilística direta e inequívoca.

Um intervalo de credibilidade IC_γ para θ é dado por:

$$P[a < \theta < b \mid x] \equiv \int_{-\infty}^{b} h(\theta \mid x) d\theta - \int_{-\infty}^{a} h(\theta \mid x) d\theta = \gamma \,, \; (a,b) \subset \Theta \tag{4.10}$$

tal que,

$$P[\theta < a \mid x] = P[\theta > b \mid x]$$

$$P[-\infty < \theta < a \mid x] = P[b < \theta < \infty \mid x]$$

$$\int_{-\infty}^{a} h(\theta \mid x) d\theta = \int_{b}^{\infty} h(\theta \mid x) d\theta = \frac{(1-\gamma)}{2}$$

O parâmetro γ também é chamado de grau de credibilidade de θ.

5. CONSTRUÇÃO DO MODELO

Retomando o problema inicial proposto, no qual deseja-se fazer um estudo acerca da volatilidade implícita nas opções de taxa de câmbio, parte-se para a etapa de definição do modelo que irá conduzir este estudo.

O modelo foi inteiramente desenvolvido no software Microsoft Excel, fazendo uso das ferramentas de linguagem de programação do Visual Basic.

Numa primeira etapa será definida e devidamente analisada a variável objeto considerada no problema. Com relação aos dados da amostra coletados, foram feitas considerações acerca da fonte dos dados, sua acurácia, identificação de períodos de crise e de fraca liquidez, além de uma análise da natureza dos mesmos e a justificativa da atribuição do modelo estatístico apropriado. Já com relação aos dados do especialista, uma discussão será conduzida sobre a obtenção desta informação e a sua tradução em termos dos parâmetros apriorísticos.

Passa-se então para a descrição do modelo propriamente dito, começando pela definição dos objetivos do modelo, onde são definidas quais as variáveis de saída. Segue-se para a parte de *setup* do teste, onde é mostrado de que forma cada teste deve ser configurado e quais as variáveis de entrada que precisam ser imputadas. Vem então a descrição do algoritmo, onde busca-se demonstrar a lógica utilizada, as diversas etapas e como elas se relacionam com a metodologia bayesiana descrita no capítulo 4. Por fim são apresentadas as planilhas construídas no MS Excel, suas funções e relacionamentos, buscando desenvolver uma espécie de "manual prático" para utilização do modelo. O formato do relatório de saída também é descrito, assim como suas atribuições e resultados, abrindo espaço para a discussão dos mesmos no capítulo 6.

5.1. Análise da variável objeto

5.1.1. Dados amostrais e fonte

A base de dados que constitui a amostra utilizada no modelo é formada basicamente pelo histórico dos valores de fechamento para a matriz de volatilidade implícita das opções de taxa

de câmbio dólar/real. Cada uma das volatilidades que compõem essa matriz corresponde a um dado amostral que será designado por $V = v_i$.

Como foi visto no capítulo 3, ao negociar opções pode-se optar alternativamente por negociar a própria volatilidade implícita de uma dada opção. Portanto, por ser considerado um produto financeiro negociável no mercado, as diversas instituições financeiras e veículos de informação do mercado financeiro (pode-se tomar como exemplos específicos: *Bloomberg*, Agência Estado, Andima) vêem a necessidade de manter uma marcação diária para este produto. Tal marcação é mais comumente feita pelos últimos valores negociados para a matriz de volatilidade implícita convencional para a opção em questão.

No caso das opções de dólar/real a matriz de volatilidade implícita tem o formato como o da *Figura 5.1*.

Figura 5.1 – Matriz de volatilidade implícita para opções de dólar em 10/05/2007

Fonte: Bloomberg

Como pode ser observado nas colunas estão dispostos os *strikes* em função do delta da opção, uma forma bem usual de representar de forma genérica o preço de exercício da opção, e nas linhas podem ser observados os prazos até o vencimento da opção.

Desta forma, a fonte onde os dados amostrais foram obtidos corresponde ao renomado veículo de informação financeira *Bloomberg*. Foi coletado um histórico dos valores de fechamento para a matriz de volatilidade descrita de um período de três anos, correspondente aos dias úteis do calendário financeiro brasileiro do período de 05 de outubro de 2004 a 05 de outubro de 2007. O total de dados para cada par *strike*-vencimento da matriz é algo entre 770 e 780 dados, variando de acordo com dados faltantes devido à ausência de negociação para o par em questão em determinadas datas.

Estas volatilidades são dadas em termos percentuais numa base anual. Portanto, V = 20 corresponde a uma volatilidade de 20% ao ano.

5.1.2. Acurácia e seleção dos dados

Uma consideração importante a ser feita a respeito dos dados remete a uma característica intrínseca do produto escolhido para a análise, que são as opções de dólar.

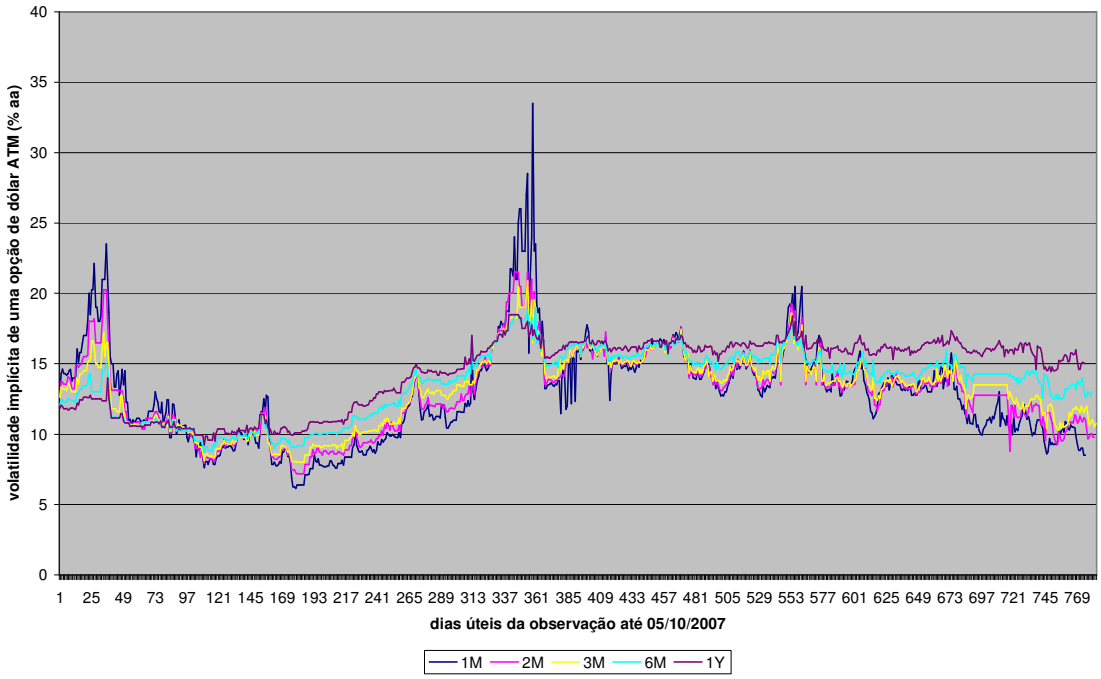
A opção acaba quase sempre por agregar aspectos relativos ao ativo objeto que ela referencia. No caso da opção de dólar, a mesma não foge à regra. Um das características mais relevantes para quem negocia o dólar futuro diz respeito a sua liquidez, que restringe-se ao vencimento correspondente ao mês seguinte à data de negociação. A opção de dólar, de maneira análoga, apresenta a mesma característica. Os demais vencimentos apresentam liquidez muito fraca e manter um histórico de preços negociados para eles torna-se uma tarefa um tanto quanto ingrata.

Ainda assim, por apresentarem maior liquidez, os dados referentes ao vencimento de um mês carregam informação suficiente a respeito da superfície de volatilidade como um todo, onde pode-se perceber uma certa correlação entre os dados dos vários vencimentos. Este fato pode ser observado no gráfico da *Figura 5.2*, que traz as séries de dados históricos para as volatilidades das opções de dólar ATM em cinco vencimentos diferentes. O que se nota é que eles se comportam de forma semelhante, porém quanto mais longo o vencimento da opção, menos sensível a volatilidade correspondente se mostra às mudanças do mercado.

Desta forma, as análises e resultados apresentados no decorrer deste trabalho serão feitos com base nos dados referentes às volatilidades implícitas para o vencimento de um mês e para o *strike* de 50D ATM, conforme notação definida na seção 3.3.3. Vale ressaltar que isto não

impede, no entanto, de estender o modelo para tratar de volatilidades de outros prazos e outros *strikes*.

Figura 5.2 – Séries históricas das volatilidades implícitas para diferentes vencimentos



Fonte: Autor, dados do Bloomberg

5.1.3. Modelo estatístico adotado

Para analisar a variável em questão foi preciso descrevê-la segundo um modelo estatístico representado por uma distribuição de probabilidade. A distribuição escolhida corresponde à *distribuição Gama*, que descreve variáveis aleatórias contínuas e é indexada por dois parâmetros: um parâmetro de escala α e um parâmetro de formato β. Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$G(x) = G(x \mid \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)}, \quad \text{para } x, \alpha, \beta > 0 \tag{5.1}$$

onde

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx, \quad \text{para } r > 0 \tag{5.2}$$

é conhecida como a função gama. Pode ser mostrado que, usando integração por partes, a função gama definida em (5.2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$$

Assim, se *r* for um inteiro positivo, tem-se que:

$$\Gamma(r) = (r-1)!$$

A função gama pode ser interpretada como uma generalização, para valores não inteiros de *r*, da função fatorial.

A média e a variância de (5.1) são respectivamente:

$$\mu = E(X) = \alpha\beta \qquad \text{e} \qquad \sigma^2 = VAR(X) = \alpha\beta^2 \tag{5.3}$$

A justificativa desta escolha se dá segundo alguns critérios a serem observados:

- A variável aleatória descrita por essa distribuição é caracterizada como do tipo contínua, excluindo desta forma distribuições de variáveis do tipo discreta;
- A distribuição escolhida deve tratar apenas dados cujo valor seja positivo, já que por definição a volatilidade não pode assumir valores negativos;
- Sua curva de densidade de probabilidade deve ser dotada de flexibilidade com relação ao seu formato, já que os dados considerados estão sujeitos a períodos de crise ou de fraca liquidez capazes de distorcer essa curva de densidade de probabilidade.

Note que a distribuição Gama atende a todos estes critérios. Além disso, vale ressaltar que a volatilidade, na sua própria definição, apresenta natureza de desvio padrão conforme demonstrado pela fórmula (3.1). Uma forma recorrente nos estudos de estatística para descrever ou estimar parâmetros de variabilidade, como o desvio padrão e a variância, é a distribuição Qui-quadrado, que nada mais é do que um caso particular da distribuição gama para uma escolha apropriada dos parâmetros α e β.

Ainda assim, para verificar se a variável de interesse segue de fato uma distribuição Gama, foi aplicado o teste de aderência de Pearson, definido em Montgomery e Runger (2003). Para

tanto, foram testados os 775 dados correspondentes à volatilidade implícita de 1M – 50D ATM.

As hipóteses testadas são:

H_0: os dados comportam-se segundo a distribuição Gama

H_1: os dados não se comportam segundo a distribuição Gama

De posse dos dados, estimou-se a média e a variância dos mesmos, de onde foi possível calcular os dois parâmetros α e β necessários para descrever a distribuição Gama em questão. O cálculo dos parâmetros foi possível a partir das equações (5.3):

$$\begin{cases} \mu = E(V) = \alpha\beta \\ \sigma^2 = VAR(V) = \alpha\beta^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \mu/\beta \\ \beta = \sigma^2/\mu \end{cases} \tag{5.4}$$

Os valores obtidos da amostra estão dispostos na *Tabela 5.1* a seguir:

Tabela 5.1 – Parâmetros utilizados no teste de aderência de Pearson

Parâmetro	Valor
E(V)	12,9038
VAR(V)	12,4728
α	13,3496
β	0,9666

Fonte: Autor, dados do Bloomberg

Dado que trata-se de uma distribuição contínua, as classes de freqüência serão definidas por intervalos equiprováveis. Tomando-se, por exemplo, 10 classes de freqüência, cada classe terá probabilidade $p_i = 10\%$. Conseqüentemente, cada classe terá uma freqüência esperada de:

$$E_i = np_i = 775 \cdot 10\% = 77{,}5$$

Os limites inferior (LI) e superior (LS) de cada classe foram determinados segundo a distribuição gama cujos parâmetros α e β são os calculados na *Tabela 5.1*. Como $p_i = 10\%$, cada classe terá seus limites definidos por:

$$\int_{LI}^{LS} G(v \mid \alpha = 13{,}3496; \beta = 0{,}9666)dv = \int_{LI}^{LS} \frac{v^{-12{,}3496} \cdot e^{-v/0{,}9666}}{0{,}9666^{13{,}3496} \cdot \Gamma(13{,}3496)} dv = 10\%$$

onde o LI da primeira classe corresponde a v_{min} = 6,15 e o LS da última classe corresponde a v_{max} = 33,502.

Além disso, com 10 classes de freqüência e 2 parâmetros estimados, a estatística de teste terá 7 graus de liberdade, pois:

$$\nu = k - 1 - m = 10 - 1 - 2 = 7$$

A tabela de freqüências fica, portanto, como se segue:

Tabela 5.2 – Tabela de freqüências do teste de aderência de Pearson

i	*pi*	*LI*	*LS*	*Oi*	*Ei*	*Oi - Ei*	*(Oi - Ei)^2*	*[(Oi - Ei)^2] / Ei*
1	10%	6,1500	8,6348	78	77,5	0,5	0,25	0,0032
2	20%	8,6348	9,8773	81	77,5	3,5	12,25	0,1581
3	30%	9,8773	10,8454	75	77,5	-2,5	6,25	0,0806
4	40%	10,8454	11,7219	86	77,5	8,5	72,25	0,9323
5	50%	11,7219	12,5830	61	77,5	-16,5	272,25	3,5129
6	60%	12,5830	13,4855	82	77,5	4,5	20,25	0,2613
7	70%	13,4855	14,4975	75	77,5	-2,5	6,25	0,0806
8	80%	14,4975	15,7440	98	77,5	20,5	420,25	5,4226
9	90%	15,7440	17,5860	79	77,5	1,5	2,25	0,0290
10	100%	17,5860	33,5020	60	77,5	-17,5	306,25	3,9516
		Total		775	775	0	1118,5	**14,4323**

Fonte: Autor, dados do Bloomberg

Conforme a *Tabela 5.2*, o valor calculado para a estatística de teste é dado por:

$$\chi_7^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 14{,}4323$$

Com 1% de significância e 7 graus de liberdade, obtém-se na tabela da distribuição χ^2 em Costa Neto (1977) o valor crítico para a estatística:

$$\chi_{7;1\%}^2 = 18{,}475$$

Como $\chi_7^2 < \chi_{7;1\%}^2$, não há indícios suficientes para se rejeitar H_0. Portanto, aceita-se a hipótese de que os dados comportam-se segundo a distribuição Gama.

Acordada a distribuição associada ao modelo estatístico adotado, pode-se enfim definir a função de verossimilhança que será utilizada para o modelo. Adaptando a função densidade

de probabilidade da distribuição Gama, definida segundo a equação (5.1), aos dados do problema, a função de verossimilhança fica da seguinte forma:

$$L(v \mid \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n} G(v_i \mid \alpha, \beta) = \frac{\left(\prod v_i\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\sum v_i\right)/\beta}}{\left[\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)\right]^{n}}, \quad \text{para } v_i, \alpha, \beta > 0 \tag{5.5}$$

5.2. Distribuição *a priori*

A figura do especialista e seu papel dentro da metodologia bayesiana foram devidamente introduzidos no capítulo 4. Agora busca-se trazer a interpretação de sua aplicação num estudo com dados reais, mais especificamente na análise proposta por este modelo em desenvolvimento.

Como já foi discutido, a volatilidade reflete uma medida da velocidade de mudança do mercado. Sendo assim, é possível fazer uma breve análise qualitativa da volatilidade. Períodos de estresse, tempos de crise ou a chegada de informações relevantes não previstas caracterizam em geral uma negociação tensa e incerta, que se traduz em dados carregados de alta volatilidade. Analogamente, um cenário econômico sob total controle e períodos de baixa liquidez ou de ausência de dados relevantes conduzem a uma negociação tendenciosa e amena, promovendo assim a baixa volatilidade. Fora destas situações extremas, prevalecem as condições normais de mercado e se faz presente a volatilidade esperada a longo prazo.

Entender esta idéia de períodos de alta e baixa volatilidade é fundamental para quem negocia opções. Este personagem deve ser capaz de avaliar a volatilidade negociada e tomar decisões com base nesta avaliação. É natural que suas decisões sejam carregadas de crenças pessoais e de elementos subjetivos. Tais elementos podem vir de fontes ditas objetivas (dados históricos, situações análogas, fatos), porém um peso grande, que muitas vezes se revela até dominante, é atribuído aos seus sentimentos e desejos individuais.

Tal caracterização remete exatamente ao especialista de Bayes. O modelo, ao utilizar a metodologia bayesiana, busca resultados que sejam capazes de balancear numa ponta a informação trazida dos dados históricos, que trazem padrões relevantes do passado, e na outra ponta a informação do especialista, que analisa menos friamente estes dados e impõe a eles ainda sua opinião e crenças pessoais.

Foi visto que esta informação do especialista bayesiano deve ser traduzida em termos de uma distribuição *a priori* de um ou mais parâmetros do modelo estatístico que descreve a variável estudada, no caso a volatilidade. Atribuindo-se a esta variável uma distribuição Gama como descrito na seção 5.1.3, a distribuição *a priori* deve descrever os parâmetros de escala e formato que indexam aquela distribuição, mais especificamente o α e o β da função densidade de probabilidade descrita na equação (5.1).

Não espera-se de um negociador de opções que ele saiba o que é uma distribuição gama, muito menos o que são seus parâmetros de formato e de escala. O especialista não precisa necessariamente ser um estatístico para ser capaz de fornecer uma informação *a priori*. Fica, portanto, a cargo do investigador a tarefa de transformá-la numa distribuição de probabilidade *a priori* adequada.

Deve-se ter em mente que a variável objeto acerca da qual o especialista tem familiaridade é a volatilidade. Desta forma, seus sentimentos, suas crenças e todo o processo de elaboração mental por ele realizado serão consubstanciados em valores estimados diretamente para esta variável. Uma típica informação de um especialista como esse seria: "espera-se que a volatilidade no longo prazo deva ficar próxima de 12%, oscilando entre 8% e 18%". Pode não parecer num primeiro momento, mas este formato de informação já é suficiente para o investigador propor a distribuição *a priori*.

Basicamente, o especialista deve fornecer dois tipos de informação, um de localização e um de dispersão. Do primeiro, obtém-se a *média* ou *esperança* da volatilidade. Do outro, obtém-se sua *amplitude*, sua *variância*, seu *desvio padrão* ou seu *coeficiente de variação*. E a partir da média e da variância saem prontamente estimativas para os parâmetros α e β da distribuição Gama, através das relações (5.4).

Tomando como exemplo a informação típica citada, teria-se:

$$E(V) = 12$$

$$R = 18 - 8 = 10 \quad \rightarrow \quad DP(V) \approx \frac{R}{4{,}5} = \frac{10}{4{,}5} = 2{,}22$$

$$VAR(V) = [DP(V)]^2 = [2{,}22]^2 = 4{,}93$$

De posse dos valores da média e da variância é possível obter as estimativas de α e β:

$$\begin{cases} \mu = E(V) = 12 \\ \sigma^2 = VAR(V) = 4{,}93 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{\alpha} = \mu / \hat{\beta} = 12/0{,}41 = 29{,}27 \\ \hat{\beta} = \sigma^2 / \mu = 4{,}93/12 = 0{,}41 \end{cases}$$

Outra análise que pode eventualmente ser feita pelo especialista é pegar uma série de dados históricos e eliminar aqueles que considere *outliers* ou menos prováveis de ocorrer no longo prazo, como dados de períodos de crise ou de baixa liquidez. Recalculando a média e a variância com os dados restantes, serão obtidos novos valores para os parâmetros da gama.

Prefere-se, no entanto, não recomendar uma única maneira ou método de obter a informação *a priori*, deixando a cargo do especialista escolher a forma que lhe pareça mais conveniente de transpor tal informação. Vale ressaltar que é responsabilidade do investigador extrair do especialista os dois tipos de informação necessários para a obtenção dos parâmetros em questão.

Porém, nos métodos bayesianos, os parâmetros são tratados como variáveis aleatórias e até agora tem-se em mãos apenas estimativas pontuais para os parâmetros, e seria uma atitude inconseqüente não apurar a incerteza quanto à acurácia de sua estimação. A idéia de tratar a informação do especialista como uma distribuição de probabilidade *a priori* consiste exatamente em agregar essa incerteza à informação.

Faz-se conveniente então atribuir a cada um dos parâmetros α e β uma distribuição *a priori* normal, de tal forma que:

$$\alpha \sim N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2) \qquad \text{e} \qquad \beta \sim N(\mu_\beta, \sigma_\beta^2)$$

Uma justificativa razoável para a adoção desta distribuição pode ser retirada do Teorema Central do Limite, eliciado em Montgomery e Runger (2003) da seguinte forma: *"toda vez que um experimento aleatório for replicado, a variável aleatória que for igual ao resultado médio das réplicas tenderá a ter uma distribuição normal, à medida que o número de réplicas se torne grande"*. Ao considerar α e β como variáveis aleatórias, e conseqüentemente a média e a variância da volatilidade, o exercício mental realizado pelo especialista para a eliciação destes parâmetros pode ser comparado a um experimento aleatório replicado várias vezes, correspondendo ao número de observações da variável feito pelo especialista ao longo de sua experiência de mercado.

A função densidade de probabilidade para uma variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ é dada pela função gaussiana:

$$\varphi(x) = \varphi(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \; x \in IR \tag{5.6}$$

onde $\sigma > 0$ é o desvio padrão.

Sendo assim, as distribuições *a priori* de α e β são descritas a partir de (5.6) como:

$$h_1(\alpha) = \varphi(\alpha \mid \mu_\alpha, \sigma_\alpha^2) = \frac{1}{\sigma_\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)^2} \tag{5.7}$$

$$h_2(\beta) = \varphi(\beta \mid \mu_\beta, \sigma_\beta^2) = \frac{1}{\sigma_\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-\mu_\beta}{\sigma_\beta}\right)^2} \tag{5.8}$$

Nota-se que para descrever apropriadamente uma distribuição normal são necessários dois parâmetros. A média dessa distribuição remete à estimativa do valor esperado para a variável e a variância ou o desvio padrão garantem ruído a essa informação. O desvio padrão também pode ser interpretado como a avaliação do especialista por parte do investigador, onde quanto maior o desvio padrão atribuído à distribuição *a priori*, maior é a incerteza que se tem daquela informação. Uma maneira de quantificar essa avaliação pode ser feita através do coeficiente de variação *CV*, definido como:

$$CV = \frac{desvio\ padrão}{média} \tag{5.9}$$

Uma possível classificação do especialista pode ser feita como na *Tabela 5.3*:

Tabela 5.3 – Obtenção do CV a partir da avaliação do especialista

Especialista	***CV da priori***
Excelente	10%
Bom	20%
Regular	30%
Ruim	40%
Péssimo	50%

Fonte: Autor

Definido o *CV* para o especialista, o desvio padrão é rapidamente calculado a partir da equação (5.9).

Resumindo, para obter as distribuições *a priori* de α e β deve-se extrair do especialista a informação a respeito da média e da variância da volatilidade, obtendo-se através das relações (5.4) os valores esperados para os parâmetros, dados por $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$. As distribuições *a priori* são normais e serão designadas por $h_1(\alpha)$ e $h_2(\beta)$, definidas respectivamente como em (5.7) e (5.8).

5.3. Distribuição *a posteriori*

Fazendo uso das definições da função de verossimilhança em (5.5) e da distribuição *a priori* em (5.7) e (5.8), assim como utilizando o resultado obtido em (4.8), a distribuição *a posteriori* conjunta de (α, β) é dada por:

$$h(\alpha,\beta \mid v) \propto L(v \mid \alpha,\beta) h_1(\alpha) h_2(\beta) \tag{5.10}$$

A distribuição conjunta de (α, β) só é possível porque os parâmetros α e β, quando tratados como variáveis aleatórias, são independentes.

Expandindo (5.10), tem-se que:

$$h(\alpha,\beta \mid v) \propto \frac{\left(\prod v_i\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\left(\sum v_i\right)/\beta}}{\left[\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)\right]^{n}} \cdot \frac{1}{\sigma_\alpha \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sigma_\beta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-\mu_\beta}{\sigma_\beta}\right)^2} \tag{5.11}$$

onde v_i são as observações da volatilidade.

Como $h(\alpha,\beta \mid v)$ obtida em (5.11) não é uma função de probabilidade conhecida e há interesse em estimar a volatilidade a partir do parâmetro $v^* = (\alpha \cdot \beta)$ – que nada mais é do que a média da distribuição Gama – será construída uma distribuição *a posteriori* empírica de v^*, empregando para isso técnicas de simulação do método de Monte Carlo. A aplicação do método será detalhada no decorrer do algoritmo, o qual será descrito na seção 5.4.3.

5.4. Descrição do modelo

A descrição do modelo será dividida em quatro partes: objetivos do modelo; *setup* do teste; algoritmo e apresentação das planilhas.

5.4.1. Objetivos do modelo

Antes de qualquer coisa, é fundamental definir aonde se quer chegar com a construção do modelo em desenvolvimento, buscando assim alinhá-lo de tal forma que não fuja do escopo do problema e atinja de maneira eficaz seus objetivos. Para tanto, é preciso definir melhor o que se procura ao analisar a volatilidade implícita nas opções de dólar.

Mas o que vem a ser o modelo? Responder a esta pergunta é uma boa forma de começar a definir seus objetivos. O modelo nada mais é do que uma ferramenta de auxílio à tomada de decisão. Ele deve ser capaz de auxiliar o negociador de opções a avaliar a volatilidade negociada no mercado, sem no entanto cair na armadilha de uma avaliação totalmente subjetiva ou mesmo totalmente objetiva. A escolha pela utilização de métodos bayesianos para analisar a volatilidade foi feita no sentido de balancear estes dois extremos, trazendo tanto informações provenientes dos dados históricos quanto da avaliação apriorística do especialista, almejando assim um equilíbrio dinâmico para esta análise.

A análise será feita a partir de inferências probabilísticas acerca da variável analisada. A estatística bayesiana traz um acervo grande de possibilidades para estimar um parâmetro que descreva determinada variável. Foram escolhidos dois estimadores. Um estimador pontual que é dado pela esperança *a posteriori* da volatilidade, visando agregar localização à análise e uma forma de estimar um valor justo – ou o tão utilizado termo em inglês *fair value* – para a volatilidade. E também um estimador por regiões, no caso um intervalo de credibilidade para a volatilidade, que proporcione uma base para avaliar se a volatilidade observada está numa região de alta, média ou baixa volatilidade.

Dado que a volatilidade não é um parâmetro prontamente observável no mercado, sua consideração por parte dos negociadores de opção reflete muito uma opinião consensual destes participantes a respeito deste parâmetro. Possuir informações apuradas sobre ele torna-se uma vantagem competitiva para seu detentor e permite que o mesmo seja capaz de interferir nessa "opinião do mercado" de forma coerente e a seu favor.

5.4.2. Setup do teste

O modelo permitirá a realização de uma série de testes, onde cada um destes testes irá refletir uma combinação de informações determinadas pelo investigador. Cabe ao investigador definir e imputar as restrições do teste para que a realização do mesmo seja possível.

As informações que devem ser fornecidas ao modelo de tal forma a preparar o início do teste são dadas por:

- O conjunto de dados a ser analisado, definindo qual o *strike K* e o vencimento *t* associados à volatilidade implícita desejada. Estes dados permitem ao modelo selecionar na base de dados coletada os dados amostrais v_i.

- A informação do especialista, dada pela média μ e pela variância σ^2 da volatilidade *V* analisada. Desta informação serão calculadas as médias dos parâmetros α e β para as distribuições *a priori* $h_1(\alpha)$ e $h_2(\beta)$.

- Para determinar qual o desvio padrão a ser utilizado nas distribuições *a priori* foi utilizada a *Tabela 5.3*, de onde é retirado o *CV* associado à avaliação qualitativa do especialista para o cômputo de σ_α e de σ_β. Assim, deve ser informada qual a avaliação que o investigador atribui ao especialista.

- O grau de credibilidade γ que deverá ser considerado na determinação do intervalo de credibilidade para *V*.

- O tamanho *n* das amostras segundo as quais os dados serão agrupados.

5.4.3. Algoritmo

O algoritmo foi desenvolvido com o auxílio de uma macro, através da linguagem de programação em Visual Basic. A listagem da macro com a linguagem em VBA está apresentada no *ANEXO A* ao fim deste trabalho.

De maneira geral, para cada teste realizado, o algoritmo do modelo procede do seguinte modo:

- *Passo 1*: Agrupa os dados v_i em *N* amostras de tamanho *n* e calcula para cada uma das *N* amostras os valores de $\prod v_i$ e $\sum v_i$.

- *Passo 2*: Selecionada uma das *N* amostras de tamanho n, gera aleatoriamente e de forma independente *k* valores de α e β segundo as distribuições *a priori* $h_1(\alpha)$ e $h_2(\beta)$, onde *k* corresponde a um número relativamente grande (no caso, foi fixado *k* = 1000).

- *Passo 3*: Calcula o valor das funções densidade de probabilidade de α e β de acordo com $h_1(\alpha)$ e $h_2(\beta)$ segundo (5.7) e (5.8), respectivamente, para cada um dos *k* valores de α e β gerados no passo 2.

- *Passo 4*: Calcula o valor da função de verossimilhança $L(v \mid \alpha, \beta)$ segundo (5.5) com os valores de $\prod v_i$ e $\sum v_i$ correspondentes à amostra em questão, para cada um dos *k* pares (α, β) gerados no passo 2.

- *Passo 5*: Calcula o valor da função $h(\alpha, \beta \mid v)$ que descreve a distribuição *a posteriori* conjunta de α e β segundo (5.10), para cada um dos *k* pares (α, β) gerados no passo 2.

- *Passo 6*: Calcula o valor da estimativa $v^* = (\alpha \cdot \beta)$, para cada um dos *k* pares (α, β) gerados no passo 2.

- *Passo 7*: Calcula o valor da função densidade $h^*(\alpha, \beta)$ associada à distribuição empírica de v^* obtida no passo 6, onde:

$$h_i^*(\alpha, \beta) = \frac{h_i(\alpha, \beta \mid v)}{\sum_{i=1}^{k} h_i(\alpha, \beta \mid v)}$$

- *Passo 8*: Calcula a esperança *a posteriori* (estimador pontual) da distribuição empírica de v^* obtida no passo 6 a partir da função densidade $h^*(\alpha, \beta)$ obtida no passo 7, da seguinte forma:

$$E[v^*] = \sum_{i=1}^{k} v_i^* \cdot h_i^*(\alpha, \beta)$$

- *Passo 9*: Ordena a distribuição empírica de v^* e calcula a função densidade acumulada $H^*(\alpha, \beta)$ associada a essa distribuição, tal que:

$$H_t^*(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{t} h_i^*(\alpha,\beta)$$

- *Passo 10*: Determina os limites inferior (*LI*) e superior (*LS*) do intervalo de credibilidade IC_γ associado a essa distribuição, onde *LI* e *LS* são respectivamente os valores mínimo e máximo de v^* cuja função densidade acumulada $H^*(\alpha,\beta)$ seja tal que :

$$\frac{1-\gamma}{2} \le H^*(\alpha,\beta) \le \frac{1+\gamma}{2}$$

- *Passo 11*: Repetir os passos 2 a 10 para as *N* amostras definidas no passo 1.

- *Passo 12*: Como os *N* valores obtidos para $E[v^*]$, *LI* e *LS* constituem distribuições empíricas para estes estimadores, calcula então a média aritmética de cada um deles ("estimador pontual do estimador").

5.4.4. Apresentação das planilhas

Existem no modelo basicamente quatro tipos de planilhas, diferenciadas pelas cores das guias: planilhas de base de dados (cor preta), planilhas de interface (cor amarela), planilhas de cálculo (cor azul) e planilhas de resultados (cor vermelha).

A seguir segue uma descrição mais detalhada de cada tipo.

Base de dados

Há apenas uma: *Base BBG*. Nela estão armazenados os dados históricos das volatilidades implícitas obtidos via Bloomberg. Estes dados estão divididos em colunas duplas, cada uma referindo-se a um par *strike* – vencimento da matriz de volatilidade implícita. Cada coluna é dupla por conter uma coluna com a data referente ao dia em que foi coletado o dado e outra com o dado em si. Na figura 5.3 pode-se observar a aparência da planilha *Base BBG*.

Figura 5.3 – Planilha *Base BBG*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	USDBRLV1M Curncy			USDBRLV2M Curncy			USDBRLV3M Curncy			USDBRLV6M Curncy			USDBRLV9M Curncy	
2	Date	Px Mid		Date	Px Mid		Date	Px Mid		Date	Px Mid		Date	Px Mid
3	05/10/2007	13,15		05/10/2007	12,775		05/10/2007	12,625		05/10/2007	12,075		05/10/2007	12,225
4	04/10/2007	14,3		04/10/2007	13,75		04/10/2007	13,35		04/10/2007	12,45		04/10/2007	12,225
5	03/10/2007	14,625		03/10/2007	13,7		03/10/2007	13,25		03/10/2007	12,45		03/10/2007	12,15
6	02/10/2007	14,3		02/10/2007	13,55		02/10/2007	13,2		02/10/2007	12,25		02/10/2007	12
7	01/10/2007	14,3		01/10/2007	13,55		01/10/2007	13,2		01/10/2007	12,25		01/10/2007	12
8	28/09/2007	14,2		28/09/2007	13,5		28/09/2007	13,1		28/09/2007	12,3		28/09/2007	12
9	27/09/2007	14,27		27/09/2007	14,075		27/09/2007	13,59		27/09/2007	12,55		27/09/2007	11,95
10	26/09/2007	14,51		26/09/2007	14		26/09/2007	13,495		26/09/2007	12,475		26/09/2007	11,95
11	25/09/2007	14,6		25/09/2007	13,85		25/09/2007	13,25		25/09/2007	12,4		25/09/2007	12
12	24/09/2007	13,75		24/09/2007	13,25		24/09/2007	13		24/09/2007	12,4		24/09/2007	12,05
13	21/09/2007	14		21/09/2007	13,25		21/09/2007	13		21/09/2007	12,4		21/09/2007	12,05
14	20/09/2007	14		20/09/2007	13,25		20/09/2007	13		20/09/2007	12,3		20/09/2007	12,05
15	19/09/2007	14,125		19/09/2007	14,875		19/09/2007	13		19/09/2007	12,25		19/09/2007	12,35
16	18/09/2007	16,05		18/09/2007	14,875		18/09/2007	13,925		18/09/2007	12,9		18/09/2007	12,35
17	17/09/2007	15,125		17/09/2007	14,725		17/09/2007	13,575		17/09/2007	12,9		17/09/2007	12,35
18	14/09/2007	15,8		14/09/2007	14,95		14/09/2007	14,25		14/09/2007	13,175		14/09/2007	12,7
19	13/09/2007	15,8		13/09/2007	14,95		13/09/2007	14,25		13/09/2007	13,175		13/09/2007	12,7
20	12/09/2007	16,425		12/09/2007	15,25		12/09/2007	14,35		12/09/2007	13,3		12/09/2007	12,7
21	11/09/2007	17		11/09/2007	15,5		11/09/2007	14,5		11/09/2007	13,425		11/09/2007	12,925
22	10/09/2007	17		10/09/2007	15,5		10/09/2007	14,5		10/09/2007	13,425		10/09/2007	12,925
23	07/09/2007	17		07/09/2007	15,5		07/09/2007	14,5		07/09/2007	13,425		07/09/2007	12,925
24	06/09/2007	18,075		06/09/2007	15,65		06/09/2007	15,1		06/09/2007	13,675		06/09/2007	12,925
25	05/09/2007	20		05/09/2007	18		05/09/2007	15,25		05/09/2007	14,25		05/09/2007	13,55
26	04/09/2007	18,5		04/09/2007	18		04/09/2007	15,25		04/09/2007	14,25		04/09/2007	13,55
27	03/09/2007	20,25		03/09/2007	18		03/09/2007	16,625		03/09/2007	13		03/09/2007	14
28	31/08/2007	20,25		31/08/2007	18		31/08/2007	16,625		31/08/2007	13		31/08/2007	14
29	30/08/2007	22,125		30/08/2007	18,2		30/08/2007	16,2		30/08/2007	13		30/08/2007	14
30	29/08/2007	19		29/08/2007	16,5		29/08/2007	15		29/08/2007	13		29/08/2007	14
31	28/08/2007	19		28/08/2007	16,5		28/08/2007	15		28/08/2007	13		28/08/2007	14
32	27/08/2007	18		27/08/2007	16,5		27/08/2007	14,725		27/08/2007	13		27/08/2007	14
33	24/08/2007	18		24/08/2007	16,5		24/08/2007	14,725		24/08/2007	13		24/08/2007	14
34	23/08/2007	18,4		23/08/2007	16,5		23/08/2007	14,725		23/08/2007	13		23/08/2007	14

Base BBG | Bayes | RndGen | LI - LS | Inputs | 1M - 50D ATM - #16 | 1M - 50D ATM - #15 | 1M - 50D ATM - #14 | 1M - 50D A

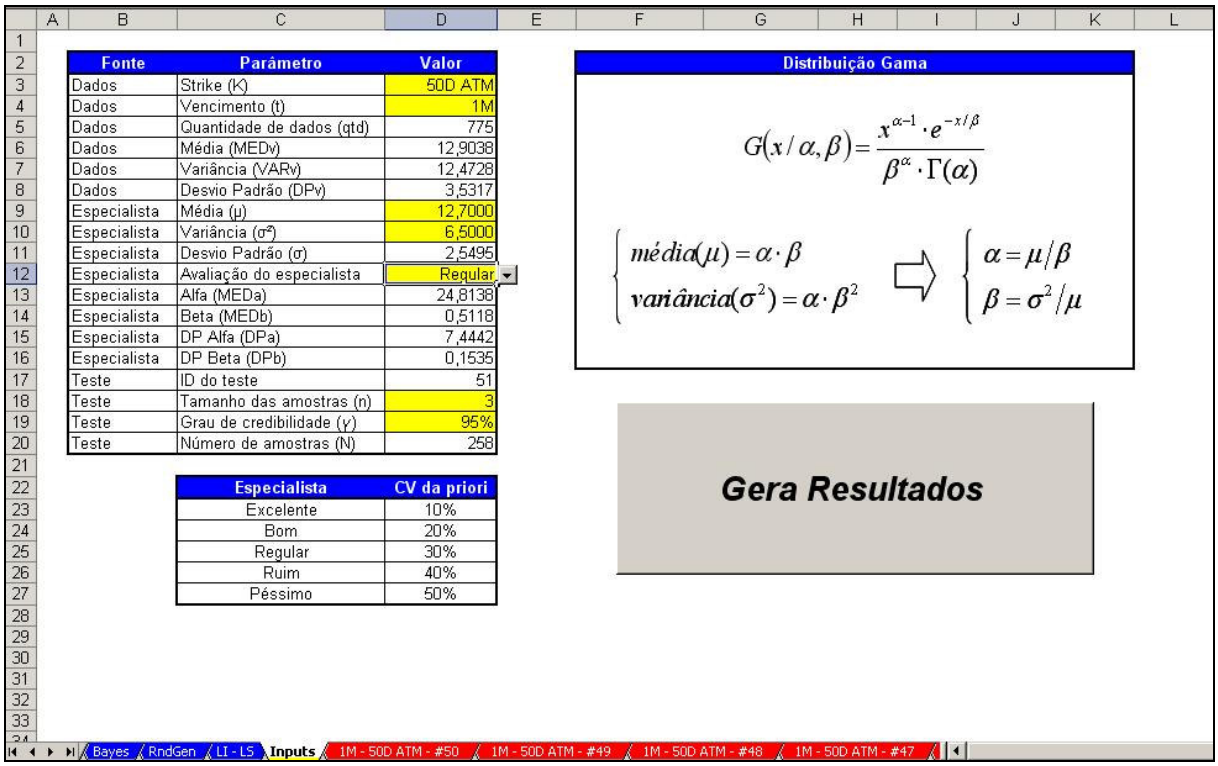
Fonte: Autor

Interface

Há apenas uma também: *Inputs*. É onde o investigador interage com o modelo, inserindo as variáveis de entrada e comandando novas realizações de testes. Há uma tabela de parâmetros, com seus respectivos valores e fontes. Nela, os valores que devem ser especificados pelo investigador estão destacados na cor amarela. Há ainda uma tabela de avaliação do investigador, como a *Tabela 5.3*, um quadro trazendo detalhes da distribuição gama e um botão *"Gera Resultados"* que, quando acionado, realiza o teste segundo o algoritmo descrito na seção 5.4.3 e de acordo com a configuração estabelecida pela tabela de parâmetros.

Na *Figura 5.4* pode-se observar a aparência da planilha *Inputs*. Na *Tabela 5.4* está um exemplo de preenchimento da tabela de parâmetros.

Figura 5.4 – Planilha *Inputs*



Fonte: Autor

Tabela 5.4 – Exemplo de preenchimento da tabela de parâmetros

Fonte	Parâmetro	Valor
Dados	Strike (K)	50D ATM
Dados	Vencimento (t)	1M
Dados	Quantidade de dados (qtd)	775
Dados	Média (MEDv)	12,9038
Dados	Variância (VARv)	12,4728
Dados	Desvio Padrão (DPv)	3,5317
Especialista	Média (μ)	12,7000
Especialista	Variância (σ²)	6,5000
Especialista	Desvio Padrão (σ)	2,5495
Especialista	Avaliação do especialista	Regular
Especialista	Alfa (MEDa)	24,8138
Especialista	Beta (MEDb)	0,5118
Especialista	DP Alfa (DPa)	7,4442
Especialista	DP Beta (DPb)	0,1535
Teste	ID do teste	51
Teste	Tamanho das amostras (n)	3
Teste	Grau de credibilidade (γ)	95%
Teste	Número de amostras (N)	258

Fonte: Autor

Cálculo

São três as planilhas de cálculo existentes no modelo: *Bayes*, *RndGen*, *LI – LS*.

A planilha *RndGen* é a planilha responsável pela geração aleatória de valores para os parâmetros α e β. Na coluna *Zi* são gerados números aleatórios segundo uma distribuição normal padronizada. As colunas *Ai* e *Bi* trazem os *k* valores de α e β, respectivamente, calculados a partir de *Zi* – a geração de números aleatórios segundo uma distribuição normal no MS Excel está detalhada no *ANEXO B*. Cada vez que a planilha é recalculada, uma nova série de *k* valores α e β são gerados. Na *Figura 5.5* pode-se observar a aparência da planilha *RndGen*.

Figura 5.5 – Planilha *RndGen*

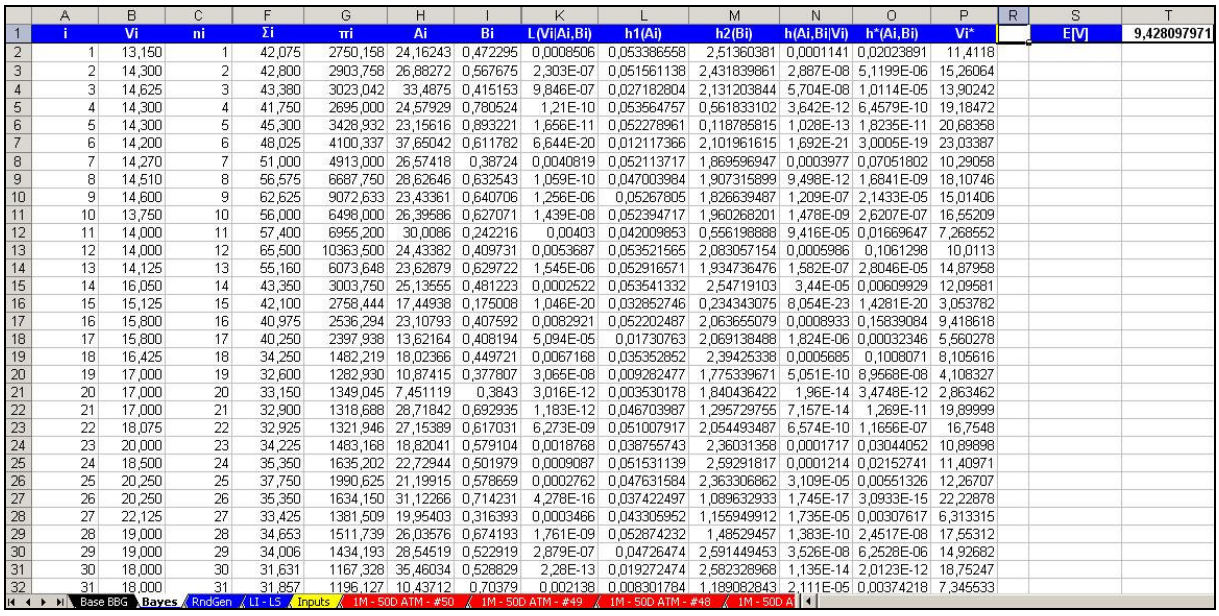
	A	B	C	D	E	F
1	i	Zi	Ai	Bi		
2	1	-0,74870252	19,24039	0,396853		
3	2	-0,592179908	20,40557	0,420886		
4	3	1,084958268	32,89044	0,678399		
5	4	0,668435905	29,78979	0,614445		
6	5	-0,602721155	20,3271	0,419267		
7	6	0,401977912	27,80623	0,573532		
8	7	0,198516144	26,29163	0,542292		
9	8	0,526472908	28,73299	0,592647		
10	9	-2,423872711	6,770165	0,139642		
11	10	-0,471544486	21,3036	0,439409		
12	11	-0,270507036	22,80015	0,470276		
13	12	0,244474492	26,63375	0,549348		
14	13	1,485641912	35,87319	0,739921		
15	14	1,995272571	39,66696	0,818172		
16	15	-0,228619581	23,11197	0,476708		
17	16	-0,315577734	22,46464	0,463356		
18	17	-0,185563631	23,43248	0,483319		
19	18	-0,121999317	23,90566	0,493079		
20	19	-0,508523152	21,02832	0,433731		
21	20	-0,332753338	22,33678	0,460719		
22	21	0,263206626	26,7732	0,552225		
23	22	-0,306479957	22,53236	0,464753		
24	23	1,040568213	32,56	0,671583		
25	24	1,94514275	39,29379	0,810475		
26	25	0,779149813	30,61396	0,631444		
27	26	-1,694319329	12,20107	0,25166		
28	27	-0,892884772	18,16707	0,374715		
29	28	-1,144343163	16,29518	0,336105		
30	29	-0,35503166	22,17094	0,457298		
31	30	-0,454421112	21,43107	0,442038		
32	31	0,234974658	26,56303	0,54789		
33	32	-0,765470778	19,11556	0,394278		
34	33	2,055892961	40,11823	0,82748		

Base BBG | Bayes | RndGen | LI - LS | Inputs | 1M - 50D ATM -

Fonte: Autor

A planilha *Bayes* é talvez a mais importante do modelo, pois é nela que todo o cálculo da metodologia bayesiana é realizado. São ao todo 13 colunas nas quais são efetuados os cálculos dos passos 1 a 8 do algoritmo descrito na seção 5.4.3. Na *Figura 5.6* pode-se observar a aparência da planilha *Bayes*.

Figura 5.6 – Planilha *Bayes*



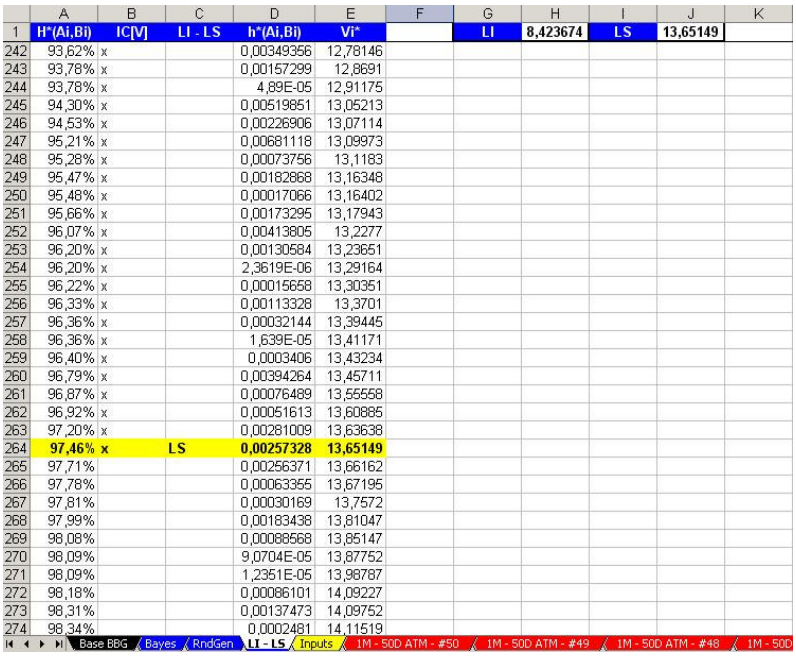
	A	B	C	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	R	S	T
1	**i**	**Vi**	**ni**	**Σi**	**πi**	**Ai**	**Bi**	**L(Vi|Ai,Bi)**	**h1(Ai)**	**h2(Bi)**	**h(Ai,Bi|Vi)**	**h*(Ai,Bi)**	**Vi***		**E[V]**	**9,428097971**
2	1	13,150	1	42,075	2750,158	24,16243	0,472295	0,0008506	0,053386558	2,51360381	0,0001141	0,02023891	11,4118			
3	2	14,300	2	42,800	2903,758	26,88272	0,567675	2,303E-07	0,051561138	2,431839861	2,887E-08	5,1199E-06	15,26064			
4	3	14,625	3	43,360	3023,042	33,4875	0,415153	9,846E-07	0,027182804	2,131203844	5,704E-08	1,0114E-05	13,90242			
5	4	14,300	4	41,750	2695,000	24,57929	0,780524	1,21E-10	0,053564757	0,561833102	3,642E-12	6,4579E-10	19,18472			
6	5	14,300	5	45,300	3428,932	23,15616	0,893221	1,656E-11	0,052278961	0,118785815	1,028E-13	1,8235E-11	20,68358			
7	6	14,200	6	48,025	4100,337	37,65042	0,611782	6,644E-20	0,012117366	2,101961615	1,692E-21	3,0005E-19	23,03387			
8	7	14,270	7	51,000	4913,000	26,57418	0,38724	0,0040819	0,052113717	1,869596947	0,0003977	0,07051802	10,29058			
9	8	14,510	8	56,575	6687,750	28,62646	0,632543	1,059E-10	0,047003984	1,907315899	9,498E-12	1,6841E-09	18,10746			
10	9	14,600	9	62,625	9072,633	23,43361	0,640706	1,256E-06	0,05267805	1,826639487	1,209E-07	2,1433E-05	15,01406			
11	10	13,750	10	56,000	6498,000	26,39586	0,627071	1,439E-08	0,052394717	1,960268201	1,478E-09	2,6207E-07	16,55209			
12	11	14,000	11	57,400	6955,200	30,0086	0,242216	0,00403	0,042009853	0,556198888	9,416E-05	0,01669647	7,268552			
13	12	14,000	12	65,500	10363,500	24,43382	0,409731	0,0053687	0,053521565	2,083057154	0,0005986	0,1061298	10,0113			
14	13	14,125	13	55,160	6073,648	23,62879	0,629722	1,545E-06	0,052916571	1,934736476	1,582E-07	2,8046E-05	14,87958			
15	14	16,050	14	43,350	3003,750	25,13555	0,481223	0,0002522	0,053541332	2,54719103	3,44E-05	0,00609929	12,09581			
16	15	15,125	15	42,100	2758,444	17,44938	0,175008	1,046E-20	0,032852746	0,234343075	8,054E-23	1,4281E-20	3,053782			
17	16	15,800	16	40,975	2536,294	23,10793	0,407592	0,0082921	0,052202487	2,063655079	0,0008933	0,15839084	9,418618			
18	17	15,800	17	40,250	2397,938	13,62164	0,408194	5,094E-05	0,01730763	2,069138488	1,824E-06	0,00032346	5,560278			
19	18	16,425	18	34,250	1482,219	18,02366	0,449721	0,0067168	0,035352852	2,39425338	0,0005685	0,1008071	8,105616			
20	19	17,000	19	32,600	1262,930	10,87415	0,377807	3,065E-08	0,009262477	1,775339671	5,051E-10	8,9568E-08	4,108327			
21	20	17,000	20	33,150	1349,045	7,451119	0,3843	3,016E-12	0,003530178	1,840436422	1,96E-14	3,4748E-12	2,863462			
22	21	17,000	21	32,900	1318,688	28,71842	0,692935	1,183E-12	0,046703987	1,295729755	7,157E-14	1,269E-11	19,89999			
23	22	18,075	22	32,925	1321,946	27,15389	0,617031	6,273E-09	0,051007917	2,054493487	6,574E-10	1,1656E-07	16,7548			
24	23	20,000	23	34,225	1483,168	18,82041	0,579104	0,0018768	0,038755743	2,36031358	0,0001717	0,03044052	10,89898			
25	24	18,500	24	35,350	1635,202	22,72944	0,501979	0,0009087	0,051531139	2,59291817	0,0001214	0,02152741	11,40971			
26	25	20,250	25	37,750	1990,625	21,19915	0,578659	0,0002762	0,047631584	2,363306862	3,109E-05	0,00551326	12,26707			
27	26	20,250	26	35,350	1634,150	31,12266	0,714231	4,278E-16	0,037422497	1,089632933	1,745E-17	3,0933E-15	22,22878			
28	27	22,125	27	33,425	1381,509	19,95403	0,316393	0,0003466	0,043305952	1,155949912	1,735E-05	0,00307617	6,313315			
29	28	19,000	28	34,653	1511,739	26,03576	0,674193	1,761E-09	0,052874232	1,48529457	1,383E-10	2,4517E-08	17,55312			
30	29	19,000	29	34,006	1434,193	28,54519	0,522919	2,879E-07	0,04726474	2,591449453	3,526E-08	6,2528E-06	14,92682			
31	30	18,000	30	31,631	1167,328	35,46034	0,528829	2,28E-13	0,019272474	2,582328968	1,135E-14	2,0123E-12	18,75247			
32	31	18,000	31	31,857	1196,127	10,43712	0,70379	0,002138	0,008301784	1,189082843	2,111E-05	0,00374218	7,345533			

Base BBG | Bayes | RndGen | LI - LS | Inputs | 1M - 50D ATM - #50 | 1M - 50D ATM - #49 | 1M - 50D ATM - #48 | 1M - 50D A

Fonte: Autor

A planilha *LI – LS* envolve o cálculo dos limites inferior e superior do intervalo de credibilidade para a volatilidade. Corresponde aos passos 9 e 10 do algoritmo descrito na seção 5.4.3. A planilha faz basicamente um teste *booleano* na coluna *IC*[*V*], marcando com um *"x"* os dados *Vi** que estiverem dentro do intervalo de credibilidade IC_γ definido. Como estão em ordem crescente, o primeiro deles será *LI* e o último *LS*. Na *Figura 5.7* pode-se observar a aparência da planilha *LI – LS*.

Figura 5.7 – Planilha *LI – LS*



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**H*(Ai,Bi)**	**IC[V]**	**LI - LS**	**h*(Ai,Bi)**	**Vi***		**LI**	**8,423674**	**LS**	**13,65149**	
242	93,62%	x		0,00349356	12,78146						
243	93,78%	x		0,00157299	12,8691						
244	93,78%	x		4,89E-05	12,91175						
245	94,30%	x		0,00519851	13,05213						
246	94,53%	x		0,00226906	13,07114						
247	95,21%	x		0,00681118	13,09973						
248	95,28%	x		0,00073756	13,1183						
249	95,47%	x		0,00182868	13,16348						
250	95,48%	x		0,00017066	13,16402						
251	95,66%	x		0,00173295	13,17943						
252	96,07%	x		0,00413805	13,2277						
253	96,20%	x		0,00130584	13,23651						
254	96,20%	x		2,3619E-06	13,29164						
255	96,22%	x		0,00015658	13,30351						
256	96,33%	x		0,00113328	13,3701						
257	96,36%	x		0,00032144	13,39445						
258	96,36%	x		1,639E-05	13,41171						
259	96,40%	x		0,0003406	13,43234						
260	96,79%	x		0,00394264	13,45711						
261	96,87%	x		0,00076489	13,55558						
262	96,92%	x		0,00051613	13,60885						
263	97,20%	x		0,00281009	13,63638						
264	**97,46%**	**x**	**LS**	**0,00257328**	**13,65149**						
265	97,71%			0,00256371	13,66162						
266	97,78%			0,00063355	13,67195						
267	97,81%			0,00030169	13,7572						
268	97,99%			0,00183438	13,81047						
269	98,08%			0,00088568	13,85147						
270	98,09%			9,0704E-05	13,87752						
271	98,09%			1,2351E-05	13,98787						
272	98,18%			0,00086101	14,09227						
273	98,31%			0,00137473	14,09752						
274	98,34%			0,0002481	14,11519						

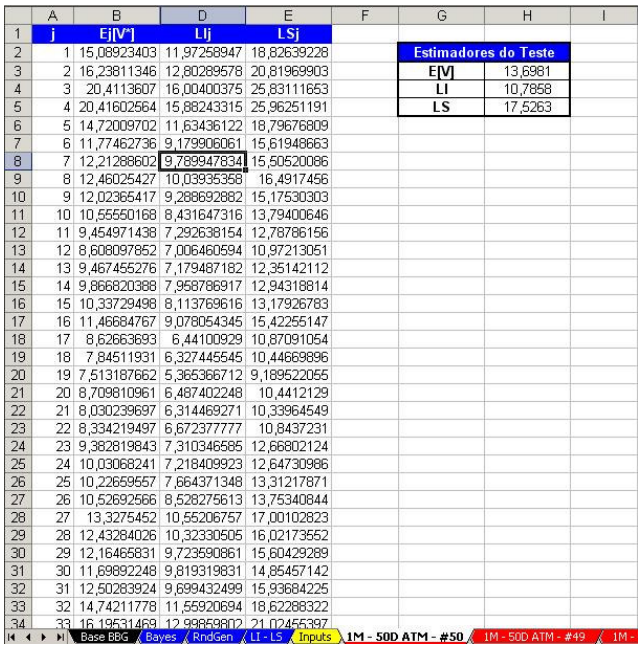
Base BBG | Bayes | RndGen | LI - LS | Inputs | 1M - 50D ATM - #50 | 1M - 50D ATM - #49 | 1M - 50D ATM - #48 | 1M - 50D

Fonte: Autor

Resultados

Há tantas planilhas de resultado quantos forem o número de testes realizados. Estas planilhas remetem basicamente a um relatório que guarda os valores dos estimadores para cada uma das *N* amostras, além de calcular os valores finais para estes estimadores correspondente ao passo 12 do algoritmo. Na *Figura 5.8* pode-se observar a aparência da planilha de resultados.

Figura 5.8 – Planilha de resultados



j	E[V*]	LIj	LSj
1	15,08923403	11,97258947	18,82639228
2	16,23811346	12,80289578	20,81969903
3	20,4113607	16,00400375	25,83111653
4	20,41602564	15,88243315	25,96251191
5	14,72009702	11,63436122	18,79676809
6	11,77462736	9,179906061	15,61948663
7	12,21288602	9,789947834	15,50520086
8	12,46025427	10,03935358	16,4917456
9	12,02365417	9,288692882	15,17530303
10	10,55550168	8,431647316	13,79400646
11	9,454971438	7,292638154	12,78786156
12	8,608097852	7,006460594	10,97213051
13	9,467455276	7,179487182	12,35142112
14	9,866820388	7,958786917	12,94318814
15	10,33729498	8,113769616	13,17926783
16	11,46684767	9,078054345	15,42255147
17	8,62663693	6,44100929	10,87091054
18	7,84511931	6,327445545	10,44669896
19	7,513187662	5,365366712	9,189522055
20	8,709810961	6,487402248	10,4412129
21	8,030239697	6,314469271	10,33964549
22	8,334219497	6,672377777	10,8437231
23	9,382819843	7,310346585	12,66802124
24	10,03068241	7,218409923	12,64730986
25	10,22659557	7,664371348	13,31217871
26	10,52692566	8,528275613	13,75340844
27	13,3275452	10,55206757	17,00102823
28	12,43284026	10,32330505	16,02173552
29	12,16465831	9,723590861	15,60429289
30	11,69892248	9,819319831	14,85457142
31	12,50283924	9,699432499	15,93684225
32	14,74211778	11,55920694	18,62288322
33	16,19531469	12,99869802	21,02455397

Estimadores do Teste	
E[V]	13,6981
LI	10,7858
LS	17,5263

Base BBG | Bayes | RndGen | LI - LS | Inputs | 1M - 50D ATM - #50 | 1M - 50D ATM - #49 | 1M -

Fonte: Autor

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo tem por objetivo validar o modelo desenvolvido no capítulo 5 ao verificar a coerência e acurácia dos resultados por ele gerados, bem como avaliar sua aplicação em situações reais de mercado. Para tanto, foram feitos diversos testes com o modelo que buscaram revelar seu comportamento frente a diferentes cenários. Cada um destes cenários foi configurado mediante distintas combinações das variáveis de entrada, que visam testar em especial três aspectos:

- O tamanho *n* das amostras que melhor trata o conjunto de dados selecionado;
- O impacto da avaliação feita pelo investigador a respeito da informação do especialista.
- O impacto da informação do especialista em relação aos dados experimentais;

As análises de cenários em geral fazem uso de situações extremas para colocar a prova como o modelo testado reage a situações de erro humano e, desta forma, levantar quais os cuidados que devem ser tomados para a obtenção de resultados eficazes.

Vale lembrar que, como argumentado na seção 5.1.2, os testes e resultados apresentados no decorrer do capítulo e do trabalho como um todo restringem-se ao conjunto de 775 dados correspondente às volatilidades implícitas das opções de dólar de *strike* 50D ATM e de vencimento 1 mês.

Com relação ao tamanho *n* das amostras, recai-se diretamente num problema relacionado à precisão do *software* utilizado na confecção do modelo. Parece razoavelmente sensato o desejo de se escolher o maior tamanho de amostra possível ao lidar com experiências estatísticas. De fato, quanto maior o valor de *n*, mais informação se tem a respeito da população à qual a amostra se refere e, conseqüentemente, maior é a precisão da inferência realizada com base na amostra coletada. Porém, uma tentativa inicial de considerar uma amostra única de 775 dados revelou-se inviável, dado que o cálculo da função de verossimilhança definida em (5.5) recaía em valores de ordem vezes extremamente grande, vezes extremamente pequena. Quando no primeiro caso, o MS Excel retornava uma mensagem de erro, quando no segundo aproximava este resultado a zero.

Seria tentador considerar o uso de outro aplicativo mais poderoso para o desenvolvimento do modelo em questão, porém neste caso depara-se com um problema de aplicabilidade. O MS Excel é de longe o mais popular aplicativo de planilha eletrônica utilizado no mundo, característica que se repete inclusive no meio de trabalho do mercado financeiro. Buscar um outro *software* mais preciso e conseqüentemente menos difundido entre as instituições que poderiam vir a utilizá-lo pode-se revelar custoso e fatalmente nada funcional. Não deseja-se criar um modelo que se transforme num "elefante branco", mas sim uma ferramenta prática de fácil uso e que apresente resultados satisfatórios.

A solução encontrada consiste em replicar o cálculo da distribuição *a posteriori* e dos estimadores para as N amostras de tamanho n, obtendo-se assim uma distribuição amostral empírica destes estimadores. Desta maneira, essa distribuição empírica carrega a informação a respeito da totalidade dos dados considerados. Com relação às mensagens de erro emitidas no cálculo da função de verossimilhança, o modelo foi adaptado para assumir o valor zero para a função quando a mesma não puder ser calculada pelo MS Excel, o que é equivalente a subutilizar ou descartar o par (α, β) gerado que estava sendo utilizado para o seu cálculo, já que a função densidade empírica a ele associada também terá valor zero.

Para analisar a reação do modelo frente ao aumento do tamanho n das amostras, foram realizados testes de acordo com as configurações expostas na *Tabela 6.1*, com 95% de grau de credibilidade. Para cada configuração selecionada aumentou-se gradativamente o valor de n até que algum padrão atípico pudesse ser observado. Os resultados destes testes estão dispostos em 8 gráficos na *Figura 6.1*.

De maneira geral, os teste realizados com o modelo já adaptado para tamanhos de amostra muito pequenos mostraram-se razoavelmente satisfatórios e sem perda considerável de precisão. Foi observado que quanto menor o tamanho da amostra, maior é a variância observada na distribuição *a posteriori* associada a cada amostra e também mais largo é o intervalo de credibilidade calculado para V a partir da distribuição empírica obtida. Porém, ainda assim os estimadores apresentaram-se plausíveis e coerentes com as informações do especialista e dos dados históricos.

No entanto, à medida que se caminha no sentido de aumento do tamanho n das amostras, o número de mensagens de erro emitidas para o cálculo da função de verossimilhança também aumenta, fazendo com que aumente o número de dados subutilizados no cálculo dos

estimadores. Essa subutilização de dados torna-se problemática a partir de certos valores de *n*, onde o modelo não é mais capaz de calcular os limites do intervalo de credibilidade de *V*, como pode ser observado nos gráficos (A), (B), (C), (D) e (G) da *Figura 6.1*. Aumentando ainda mais o valor de *n*, e em conseqüência também o número de dados subutilizados, os valores obtidos para a esperança *a posteriori* de *V* começam a decair até que não possam mais ser calculados. Isto está evidenciado nos gráficos (A), (B), (C) e (D) da *Figura 6.1*.

Tabela 6.1 – Configuração dos testes I

Dados amostrais	**Média**	**Variância**	**Desvio Padrão**	**Qtde de dados**
	12,9038	12,4728	3,5317	775

Teste	**Informação do especialista**		**Avaliação do Especialista**	**Amplitude de variação de *n***
	Média	**Variância**		
A	12,9038	12,4728	Excelente (10%)	1 a 25
B	12,9038	12,4728	Péssimo (50%)	1 a 60
C	12,7	6,5	Excelente (10%)	1 a 14
D	12,7	6,5	Péssimo (50%)	1 a 35
E	30	150	Excelente (10%)	1 a 10
F	30	150	Péssimo (50%)	1 a 10
G	5	2,5	Excelente (10%)	1 a 10
H	5	2,5	Péssimo (50%)	1 a 10

Fonte: Autor

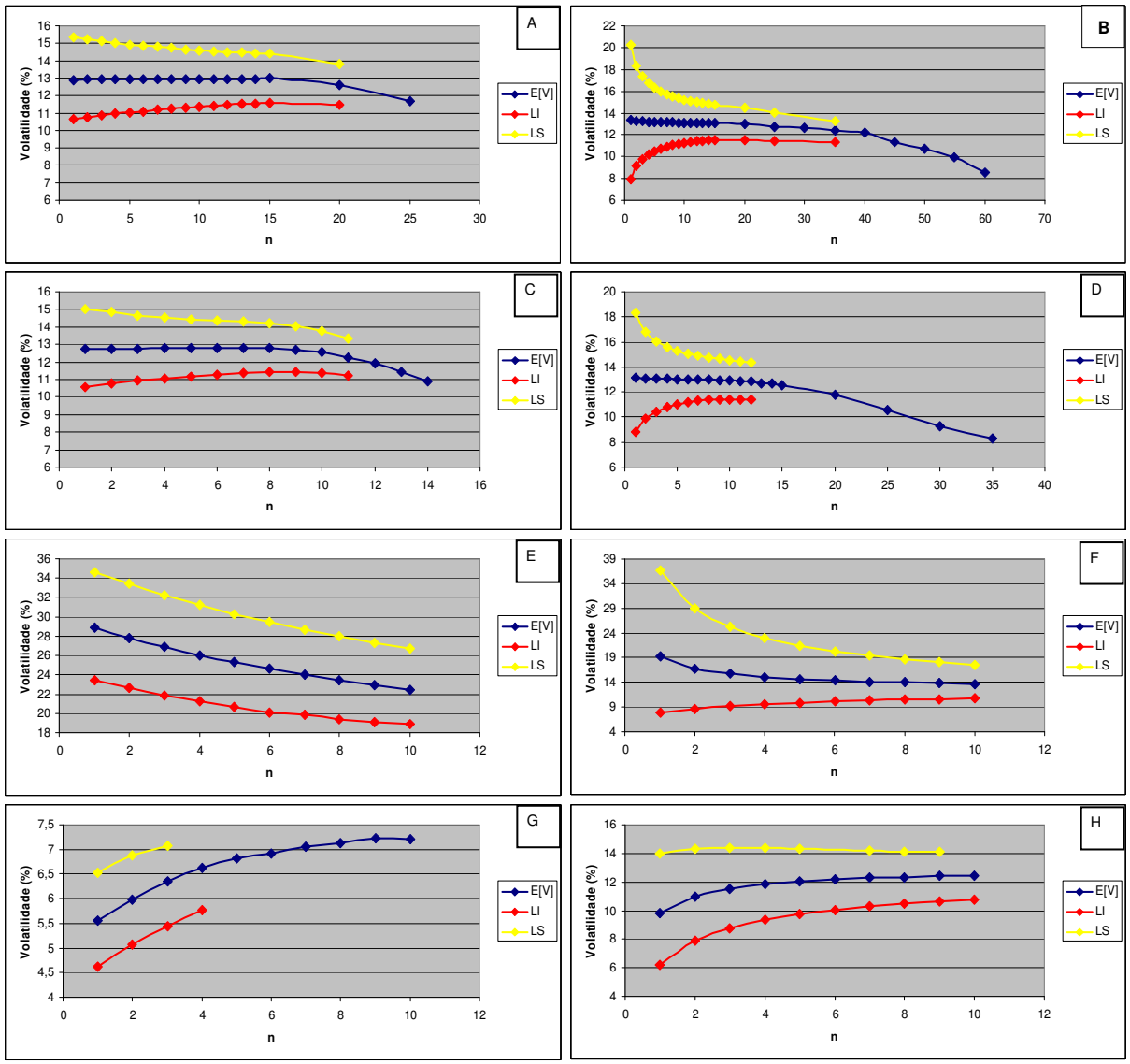
Pode-se afirmar com base na discussão realizada e na observação dos resultados da *Figura 6.1* que a escolha por amostras de tamanho $3 \leq n \leq 7$ não gera grandes problemas ao investigador, além de trazer resultados razoavelmente satisfatórios.

Também deseja-se testar de que forma o modelo reage às diferentes avaliações do especialista conduzidas pelo investigador, ou seja, qual o impacto da escolha do desvio padrão que será imprimido à distribuição *a priori*. Para tanto foram realizados novos testes, agora configurados como na *Tabela 6.2*, ainda com 95% de grau de credibilidade. Para cada configuração selecionada variou-se uma a uma a avaliação do especialista, dentre as cinco possíveis. Os resultados destes testes estão dispostos nos gráficos da *Figura 6.2*.

Conforme observado nos resultados da *Figura 6.2*, quanto melhor for a avaliação do especialista, ou ainda, quanto menor for o *CV* associado à sua informação, mais curto será o intervalo de credibilidade calculado para a volatilidade. Isso é equivalente a dizer que quanto menor o *CV* imposto à informação do especialista, menos ruído está sendo agregado à

distribuição *a priori* e maior é a incerteza acerca dessa informação. Menor também será o impacto que a informação provinda dos dados históricos terá sobre a informação do especialista, o que pode ser mais claramente percebido nos gráficos (K) e (L) da *Figura 6.2*, situações nas quais a média e a variância da informação apriorística mais se distanciam da média e da variância observada nos dados históricos da volatilidade.

Figura 6.1 – Resultados dos testes I



Fonte: Autor

Outra conclusão que pode ser obtida a partir dos resultados já expostos nas *Figuras 6.1* e *6.2* diz respeito ao equilíbrio estabelecido entre as diferentes informações e pra que lado os estimadores da distribuição *a posteriori* pendem mais, se para o do especialista ou se para o dos dados experimentais. De uma forma geral, quando a informação fornecida pelo especialista é muito diferente daquela fornecida pelos dados amostrais, ela é transformada por

estes dados através da função de verossimilhança. A velocidade com que esta transformação é feita é tão maior quanto maior for a combinação de um alto *CV* associado à distribuição *a priori* com um número elevado de tamanho amostral.

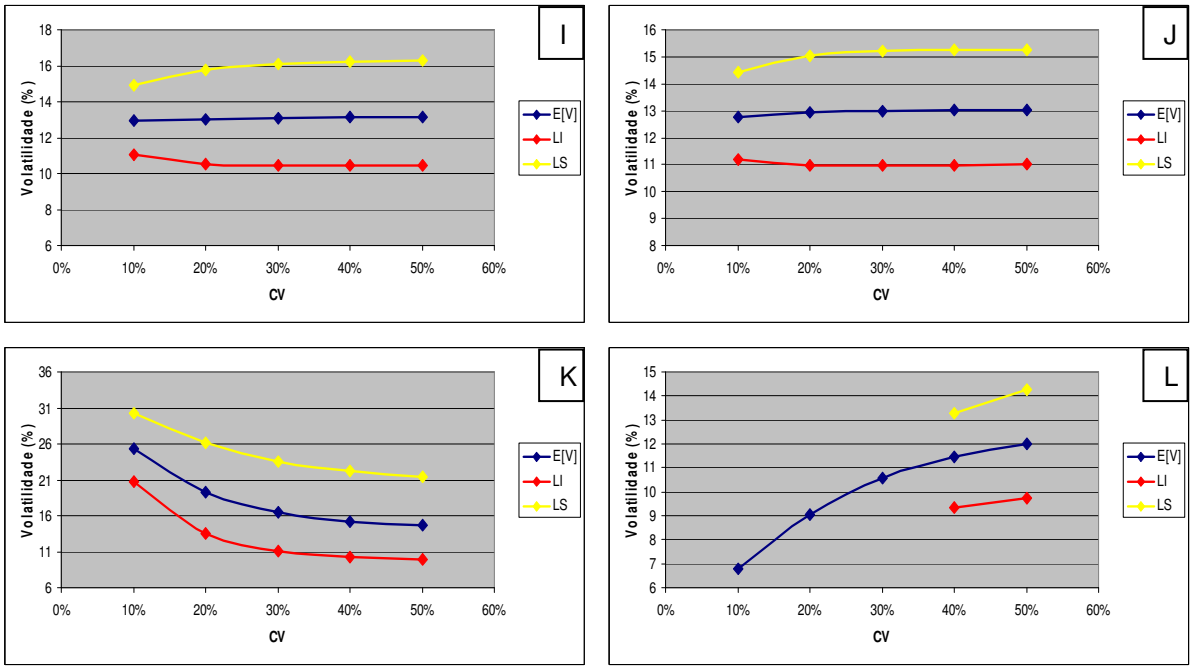
Tabela 6.2 – Configuração dos testes II

Dados amostrais	**Média**	**Variância**	**Desvio Padrão**	**Qtde de dados**
	12,9038	12,4728	3,5317	775

Teste	**Informação do especialista**		**Tamanho *n* das amostras**	**Amplitude de variação do *CV***
	Média	**Variância**		
I	12,9038	12,4728	5	10% a 50%
J	12,7	6,5	5	10% a 50%
K	30	150	5	10% a 50%
L	5	2,5	5	10% a 50%

Fonte: Autor

Figura 6.2 – Resultados dos testes II



Fonte: Autor

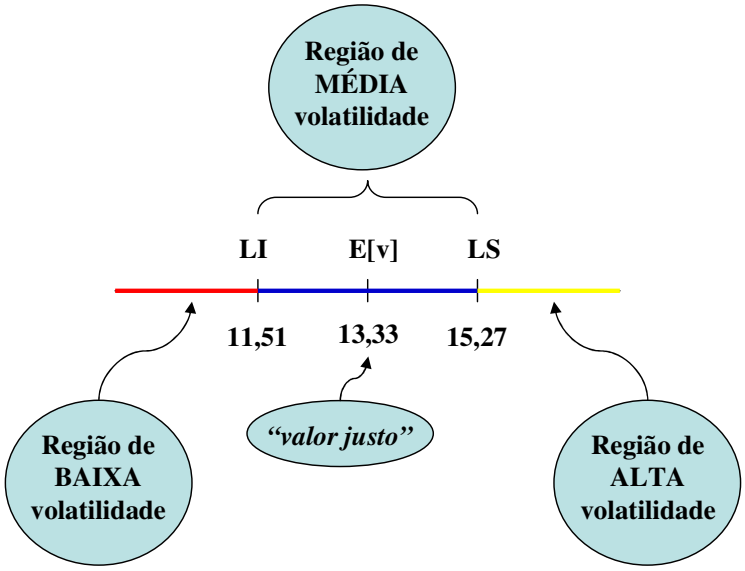
Uma última eventual análise dos resultados consiste na determinação de regiões de baixa, média e alta volatilidade, a fim de se avaliar a volatilidade observada no mercado com base nos resultados obtidos a partir do modelo desenvolvido. Considere como exemplo um teste realizado com os seguintes parâmetros de entrada:

- Informação do especialista: Média = 15% e Variância = 11,5%

- Tamanho das amostras: $n = 6$
- Avaliação do especialista: Bom ($CV = 20\%$)
- Grau de credibilidade: $\gamma = 90\%$

Os resultados para este teste estão apresentados na *Figura 6.3*.

Figura 6.3 – Resultado do teste III



Fonte: Autor

Por este resultado é possível classificar os intervalos conforme explicitado na *Figura 6.3* com 90% de credibilidade. Essa classificação por regiões utilizando o intervalo de credibilidade obtido no teste é de grande importância, dado que a volatilidade é diretamente negociável no mercado. Regiões de baixa volatilidade correspondem a valores segundo os quais é interessante assumir uma posição comprada nesta volatilidade, assim como regiões de alta volatilidade são atraentes para posições vendidas na mesma.

7. CONCLUSÃO

O trabalho de formatura apresentado tem por objetivo maior a identificação e solução de um problema real existente na empresa na qual foi realizado o estágio supervisionado. A empresa em questão corresponde ao Deutsche Bank e o estágio foi desenvolvido especificamente na área de *Global Markets Trading*, onde foi possível o contato com uma série de produtos financeiros negociados pela instituição. Dentre estes produtos, um deles, mais especificamente as opções de taxa de câmbio, vem apresentando um crescimento de liquidez e de demanda por parte dos clientes. Dado que o Deutsche Bank constitui um banco mundial altamente competitivo, a evolução do produto citado despertou a atenção da empresa para sua importância estratégica e para a necessidade de um maior cuidado na precificação deste produto.

A precificação das opções de taxa de câmbio, assim como a precificação dos demais tipos de opções, se dá segundo o modelo de B&S, um modelo pioneiro e popular, porém carregado de imperfeições. Dentre elas, uma diz respeito à consideração por parte do mesmo de uma de suas variáveis de entrada como sendo uma constante. Esta variável corresponde à volatilidade, que pode ser entendida como uma medida da velocidade de mudança do mercado. Esta variável não é prontamente observável no mercado e ao ser tratada na precificação de opções é considerada na verdade como uma volatilidade implícita no preço das mesmas, sendo obtida a partir do preço vigente da opção à qual se referencia. Foi observado que as volatilidades implícitas constituem uma superfície de volatilidade, variando com relação ao *strike* da opção e ao prazo até o vencimento da mesma.

Por ser obtida implicitamente no preço de mercado das opções, a volatilidade implícita de equilíbrio constitui uma opinião consensual do mercado acerca de qual deverá ser seu valor ao longo da vida da opção. Da mesma forma, o negociador de opções deve ser capaz de avaliar a volatilidade observada no mercado e tomar decisões com base em sua análise pessoal a respeito desta volatilidade. Visando agregar uma carga maior de informação objetiva à análise pessoal do *trader*, foi proposto o desenvolvimento de um projeto junto à área de *Global Markets Strategy*, que resultaria num modelo capaz de balancear os dois tipos de informação na análise da volatilidade.

Para a construção do modelo, recorreu-se à teoria de métodos bayesianos, onde aos dados amostrais se une a informação obtida a partir da figura de um especialista. Desta informação são obtidas distribuições *a priori* normais dos parâmetros α e β, os quais indexam a função densidade de probabilidade da distribuição Gama escolhida para descrever a variável objeto, a volatilidade implícita. Valores para α e β são gerados aleatoriamente segundo as suas respectivas distribuições *a priori* e transformados pela função de verossimilhança, que traz a informação proveniente dos dados amostrais compostos por um histórico obtido via *Bloomberg* dos valores de fechamento diários das volatilidades implícitas. Desta forma é obtida uma distribuição *a posteriori* conjunta dos parâmetros α e β, que possibilita por sua vez a obtenção de uma distribuição empírica para a volatilidade. A técnica de simulação de valores que geram uma distribuição empírica passa pelo uso de método de Monte Carlo, onde a partir desta distribuição é possível fazer uma estimativa pontual (esperança *a posteriori*) e outra por regiões (intervalo de credibilidade) acerca da variável em questão.

O modelo desenvolvido foi devidamente testado através da análise de cenários, onde seu comportamento frente a situações extremas foi avaliado. Um problema que envolve o tamanho das amostras consideradas foi levantado, já que o *software* utilizado para a confecção do modelo – o MS Excel – apresentou problemas de precisão no cálculo da função de verossimilhança. Esta questão foi contornada mediante a adaptação do modelo para que o mesmo agrupasse segundo amostras menores o conjunto total de dados amostrais coletado. Testes foram realizados e verificou-se que o modelo apresenta dados satisfatórios para o conjunto agrupado em amostras de tamanho $3 \leq n \leq 7$.

Também foi verificado o bom comportamento do modelo ao considerar a avaliação do especialista por parte do investigador, onde ao atribuir um *CV* mais elevado quando a informação do especialista não for coerente com o conjunto de dados, ou seja, agregando incerteza a esta informação, o modelo que se afasta mais rapidamente neste caso dos dados distorcidos.

Por fim, foi sugerida outra aplicação prática direta do modelo quando deseja-se negociar diretamente a volatilidade ao invés da opção a ela associada. Esta aplicação consiste em fazer uso do intervalo de credibilidade obtido a partir do modelo para determinar regiões de baixa, média e alta volatilidade, permitindo ao *trader* avaliar se a volatilidade negociada no mercado está posicionada numa região interessante de negociação.

Analisando agora o projeto como um todo, foi possível evidenciar a contribuição do curso de Engenharia de Produção em toda a sua confecção. Além de toda a base teórica adquirida nas disciplinas de Engenharia Econômica, Finanças, Estatística e Controle da Qualidade, além das disciplinas básicas de Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo Numérico, também merecem destaque a capacidade analítica, o raciocínio lógico, a metodologia, a visão sistêmica e todos os outros atributos estimulados e assimilados ao longo deste curso de graduação. Sem dúvida a condução deste trabalho só foi possível graças a uma formação exímia que a Escola Politécnica ofereceu e que transforma seus alunos aqui graduados na melhor propaganda que poderia desejar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COX, J., ROSS, S., RUBINSTEIN, M. **Option Pricing: A Simplified Approach.** Journal of Financial Economics, v.7, pp. 229-264, 1979.

BLACK, F., SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities.** Journal of Political Economy, v.81, pp. 637-659, 1973.

ITÔ, K. **On Stochastic Differencial Equations.** Memoirs, American Mathematical Society, v.4, pp. 1-51, 1951.

HULL, J. C. **Introduction to Futures and Options Markets.** New Jersey: Prentice Hall, 1997.

HULL, J. C. **Opções, Futuros e outros Derivativos.** São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2003.

NATENBERG, S. **Option Volatility & Pricing.** New York: McGraw-Hill, 1994.

PAULINO, C. D., TURKMAN, M. A. A., MURTEIRA, B. **Estatística Bayesiana.** Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.

MONTGOMERY, D. C., RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade Para Engenheiros.** Rio de Janeiro: LTC, 2003.

COSTA NETO, P. L. de O., **Estatística.** São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

REFERÊNCIAS COMPLEMENTARES

GUIMARÃES, R. V. **Trabalho de Formatura: Uso de Regressão Logística para Previsão de Fechamento de Operações Financeiras: Termo de Moedas.** São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Produção, 2006.

PESSÔA, T. M. **Trabalho de Formatura: Modelo para Determinação da Curva de Volatilidade de Ativos.** São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Produção, 2003.

NEFTCI, S. N. **An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.** San Diego: Elsevier, 2000.

BOLSA DE MERCADORIAS & FUTUROS – BM&F. São Paulo. Apresenta informações sobre o funcionamento da Bolsa de Mercadorias & Futuros. <http://www.bmef.com.br>

WIKIPEDIA. Enciclopédia eletrônica livre que contém artigos diversos para consulta. <http://www.wikipedia.org>

EXCEL USER. Acesso ao tutorial: *"An Introduction to Excel's Normal Distribution Functions"* de KYD, C. 2006. <http://www.exceluser.com/explore/stasnormal.htm>

ANEXO A – Macro “GeraResultados”

```
Sub GeraResultados()
'
' GeraResultados Macro
' Macro gravada em 20/09/2007 por Vito Trisuzzi
'

    'define variáveis de entrada

    Dim K As String
    Dim t As String
    Dim ID As String

    Sheets("Inputs").Select
    qtd = Range("qtd").Value
    Nam = Range("Nam").Value
    menosNam = -Nam
    K = Range("K").Text
    t = Range("t").Text
    ID = Range("ID").Text
    res = t & " - " & K & " - #" & ID


    'cria planilha de resultados

    Sheets.Add
    ActiveSheet.Select
    ActiveSheet.Name = res
    Sheets(res).Move After:=Sheets("Inputs")
    Sheets(res).Tab.ColorIndex = 3
    Sheets(res).Select

    Range("A1").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "j"
    Selection.ColumnWidth = 5

    Range("B1").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "Ej[Vi*]"
    Selection.ColumnWidth = 11

    Range("C1").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "Ej[VAR(Vi*)]"
    Selection.ColumnWidth = 11

    Range("D1").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "LIj"
    Selection.ColumnWidth = 11

    Range("E1").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "LSj"
    Selection.ColumnWidth = 11

    Range("A1:E1").Select
    With Selection.Interior
        .ColorIndex = 5
        .Pattern = xlSolid
    End With
    With Selection.Font
        .ColorIndex = 2
        .Bold = True
    End With
    Selection.HorizontalAlignment = xlCenter

    Sheets("Bayes").Select
    Range("X3:Y7").Select
    Selection.Copy
    Sheets(res).Select
    Range("G2").Select
    ActiveSheet.Paste
    Selection.ColumnWidth = 11
```

```
'gera esperanças e limites

j = 1

For j = 1 To Nam

    Sheets(res).Select
    Cells(j + 1, 1).Value = j
    Range("conta_n").Value = j + 1

    'atualiza alfa e beta
    Sheets("RndGen").Select
    Calculate
    Range("C2:C1000").Select
    Selection.Copy
    Sheets("Bayes").Select
    Range("H2").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues
    Sheets("RndGen").Select
    Calculate
    Range("D2:D1000").Select
    Selection.Copy
    Sheets("Bayes").Select
    Range("I2").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues

    'gera esperanças
    Range("EV").Select
    Selection.Copy
    Sheets(res).Select
    Cells(j + 1, 2).Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues
    Sheets("Bayes").Select
    Range("EVARV").Select
    Selection.Copy
    Sheets(res).Select
    Cells(j + 1, 3).Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues

    'atualiza planilha de limites
    Sheets("LI - LS").Select
    Range("D2:E1000").Select
    Selection.ClearContents
    Sheets("Bayes").Select
    Range("O2:P1000").Select
    Selection.Copy
    Sheets("LI - LS").Select
    Range("D2").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues
    Range("D2:E1000").Select
    Selection.Sort Key1:=Range("E2"), Order1:=xlAscending, Header:=xlGuess, _
       OrderCustom:=1, MatchCase:=False, Orientation:=xlTopToBottom, _
       DataOption1:=xlSortNormal

    'gera limites
    Range("H1").Select
    Selection.Copy
    Sheets(res).Select
    Cells(j + 1, 4).Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues
    Sheets("LI - LS").Select
    Range("J1").Select
    Selection.Copy
    Sheets(res).Select
    Cells(j + 1, 5).Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues

Next

'calcula média de monte carlo dos estimadores
Sheets(res).Select
Cells(Nam + 2, 1).Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "MED"
Cells(Nam + 2, 2).Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=AVERAGE(R[" & menosNam & "]C:R[-1]C)"
Selection.Copy
```

```
    Range(Cells(Nam + 2, 2), Cells(Nam + 2, 5)).Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteFormulas
    Calculate
    Selection.Copy
    Range("H3").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Transpose:=True


    'atualiza ID para o próximo teste
    Range("ID").Value = Range("ID").Value + 1


End Sub
```

ANEXO B – Geração aleatória segundo uma normal

No modelo, os parâmetros α e β utilizados serão gerados aleatoriamente a partir de uma distribuição normal padrão, que será modificada de acordo com a média e o desvio padrão especificados para cada um. Ao realizar essa geração aleatória repetidas vezes garante-se que o modelo irá, numericamente, "varrer" todo o espaço-amostra nos quais os parâmetros estão definidos.

Passa-se então ao problema de como realizar tal simulação. Para a geração de números aleatórios segundo uma distribuição normal no MS Excel, a seguinte dificuldade foi abordada.

A função *INV.NORM* (*NORMINV* na versão em inglês) retorna o inverso da distribuição cumulativa normal, ou seja, tem como saída um valor normalmente distribuído quando especificados sua probabilidade e a média e o desvio padrão que determinam a distribuição. É definida, portanto, da seguinte forma:

INV.NORM(probabilidade; média; desv_padrão)

Já a função *ALEATÓRIO* (*RAND* na versão em inglês) retorna um número aleatório entre 0 e 1, distribuído uniformemente. Ela não possui parâmetros de entrada e sua saída é modificada sempre que a planilha for recalculada. Dessa forma, é possível utilizar essa função para gerar probabilidades aleatórias.

Fica tentador utilizar a função *INV.NORM* para calcular um número aleatório segundo uma distribuição normal, utilizando a seguinte fórmula:

=INV.NORM(ALEATÓRIO(); média; desv_padrão)

Segundo Kyd (2006), o uso dessa solução não é recomendado, isso devido a inadequações observadas na função *INV.NORM*, decorrentes de problemas de acurácia acerca de sua implementação.

A proposta de Kyd é fazer uso do método de Box-Müller, o qual seria limitado apenas por eventuais inadequações da função *ALEATÓRIO*, as quais não são observadas desde a versão de 2003 do MS Excel. De acordo com Kyd, o método de Box-Müller é matematicamente exato, se implementado com um perfeito gerador de números aleatórios e precisão infinita.

O método consiste na transformação de uma distribuição uniforme contínua bidimensional em uma distribuição normal bivariada, também de duas dimensões. Se x_1 e x_2 são uniformemente e independentemente distribuídos entre 0 e 1, então z_1 e z_2, como definidos logo abaixo, seguem uma distribuição normal padronizada (média zero e desvio padrão unitário).

$$z_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\cos(2\pi x_2) \tag{B.1}$$

$$z_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\,sen(2\pi x_2) \tag{B.2}$$

Isso pode ser verificado ao resolver em x_1 e x_2 o sistema composto pelas equações (B.1) e (B.2), obtendo-se:

$$x_1 = e^{-\left(z_1^2+z_2^2\right)/2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2\pi} tg^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

O Jacobiano da transformação é dado por:

$$J(z_1, z_2) = \left[\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(z_1, z_2)}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial z_2} \end{bmatrix}$$

cujo determinante resulta em:

$$J = \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(z_1, z_2)}\right| = -\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_1^2/2}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_2^2/2}\right] \tag{B.3}$$

onde os termos em colchetes da equação (B.3) remetem à função gaussiana modificada para uma distribuição normal padronizada.

Utilizando o método de Box-Müller descrito, a seguinte fórmula seria a mais apropriada para o cálculo de um número aleatório segundo uma distribuição normal padronizada:

=RAIZ(-2*LN(ALEATÓRIO()))*SEN(2*PI()*ALEATÓRIO())

Desta maneira, cada vez que a planilha for recalculada a fórmula acima irá retornar um número diferente que segue uma distribuição normal padronizada. Para obter aleatoriamente os parâmetros segundo a distribuição normal específica de cada um, basta fazer a seguinte modificação ao número z_i obtido pela fórmula:

$$\alpha_i = z_i \cdot DP_\alpha + \hat{\alpha} \qquad \text{e} \qquad \beta_i = z_i \cdot DP_\beta + \hat{\beta}$$

Além disso, para garantir que as distribuições de α e β sejam independentes basta recalcular a planilha entre a obtenção dos dois parâmetros, fazendo com que a fórmula *ALEATÓRIO* também seja recalculada e gere com isso uma nova série de números aleatórios.